

**Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Уфимский государственный авиационный технический университет**

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ**

**Лабораторный практикум
по дисциплине
«Теория электромагнитного поля»**

Уфа 2006

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Уфимский государственный авиационный технический университет

Кафедра теоретических основ электротехники

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Лабораторный практикум
по дисциплине
«Теория электромагнитного поля»

Уфа 2006

Авторы: Т.И. Гусейнова, Т.М. Крайнова, В.С. Лукманов,
Е.В. Парфенов, И.Е. Чечулина

УДК 621.3.013.001.24:004(07)
ББК 22.313:32.97(Я7)

Экспериментальные методы моделирования электромагнитных полей: Лабораторный практикум по дисциплине «Теория электромагнитного поля» / под ред. Т.И. Гусейновой / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа, 2006. – 90 с.

Лабораторный практикум соответствует Государственному образовательному стандарту по дисциплине «Теория электромагнитного поля» для направления подготовки бакалавров и дипломированных специалистов 200100 «Приборостроение», специальностей 200103 «Авиационные приборы и информационно-измерительные комплексы» и 200106 «Информационно-измерительная техника и технологии».

В настоящей работе содержатся описания лабораторных работ по курсу теоретических основ электротехники части третьей или теории электромагнитного поля, которые выполняются студентами электротехнических специальностей. Для каждой лабораторной работы приведены краткие теоретические сведения, описание рабочей установки, порядок работы с ней и рабочее задание.

Лабораторный практикум предназначен для студентов вышеуказанного направления и специальностей, а также направления подготовки 200400 «Биомедицинская техника», специальностей 200401 «Биотехнические и медицинские аппараты и системы» и 200402 «Инженерное дело в медико-биологической практике», и других электротехнических специальностей, изучающих курс «Теория электромагнитного поля» по очной и заочной формам обучения.

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Хайруллин И.Х.
канд. техн. наук, доц. Вавилова И.В.

ISBN 5-86911-635-X

© Уфимский государственный
авиационный технический университет, 2006
© Коллектив авторов, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1 Моделирование плоскопараллельного электростатического поля полям стационарных токов на проводящей бумаге.....	5
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2 Определение емкостных коэффициентов, частичных емкостей и потенциальных коэффициентов.....	16
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3 Исследование плоскомеридианного поля на сеточной модели	24
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4 Исследование распределения тока в плоском проводящем листе.....	36
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5 Определение размагничивающих факторов тел разной формы	43
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6 Исследование преломления линии электрического тока на границе раздела двух сред с различными удельными проводимостями.....	51
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7 Поверхностный эффект в шине, помещенной в паз электрической машины.....	59
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8 Электромагнитные волны в двухпроводной линии.....	69
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9 Исследование электромагнитного поля переменного электрического диполя	81
ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТОВ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ.....	90
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	90

ВВЕДЕНИЕ

Лабораторный практикум по дисциплине «Теория электромагнитного поля» входит в единый учебно-методический комплекс, разработанный кафедрой теоретических основ электротехники УГАТУ.

Настоящая работа предназначена для проведения лабораторных занятий по третьей части курса ТОЭ «Теория электромагнитного поля», изучаемой студентами электротехнических специальностей.

Составлены описания работ по темам:

- моделирование плоскопараллельных электростатических полей полей стационарных токов на проводящей бумаге и металлических листах;
- моделирование плоскопараллельного поля с помощью сеточных сопротивлений;
- определение размагничивающих факторов тел разной формы, помещенных в однородное магнитное поле, смоделированное катушкой Гельмгольца;
- изучение поверхностного эффекта с помощью модели паза электрической машины;
- изучение распространения электромагнитных волн на моделях двухпроводной линии и модели электрического диполя.

Большинство лабораторных работ имеет программное обеспечение в виде математического моделирования полей на ЭВМ.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

Моделирование плоскопараллельного электростатического поля полям стационарных токов на проводящей бумаге

1.1 Цель работы

Целью работы является изучение метода моделирования плоскопараллельного электростатического поля. В основе моделирования лежит аналогия электростатического поля в диэлектрике и поля стационарных токов в проводящей среде – при одинаковых граничных условиях. В первой части работы моделируется поле системы электродов, которое можно рассчитать аналитически. Результаты эксперимента сравниваются с расчетными данными.

Во второй части моделируется поле, аналитическое решение для которого сложно и не проводится. По результатам опыта строится картина поля и вычисляются емкости.

1.2 Подготовка к работе

1.2.1. Определить удельную проводимость бумаги. Для этого с помощью мультиметра измерить сопротивление R полоски бумаги. Мультиметр должен быть включен в режим «измерение сопротивления», предел измерения 20 кОм. Затем, с учетом известной формулы

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

определить удельную проводимость

$$\gamma = \frac{1}{\rho}.$$

При вычислении площади поперечного сечения бумаги S использовать значение толщины бумаги $\Delta=0,01$ мм.

1.2.2. Подготовить расчетные данные по первой части работы:

а) вычислить емкость на единицу длины системы, изображенной на рис. 1.1,а, 1.1,б или 1.1,в в соответствии с заданием. Размер a выбирается произвольно; окружающая среда – воздух;

б) рассчитать радиус и координату центра эквипотенциали, потенциал которого равен 30 % от приложенной к электродам разности потенциалов (30 В);

в) рассчитать напряженность электрического поля в точке М, полагая, что приложенное напряжение равно 30 В.

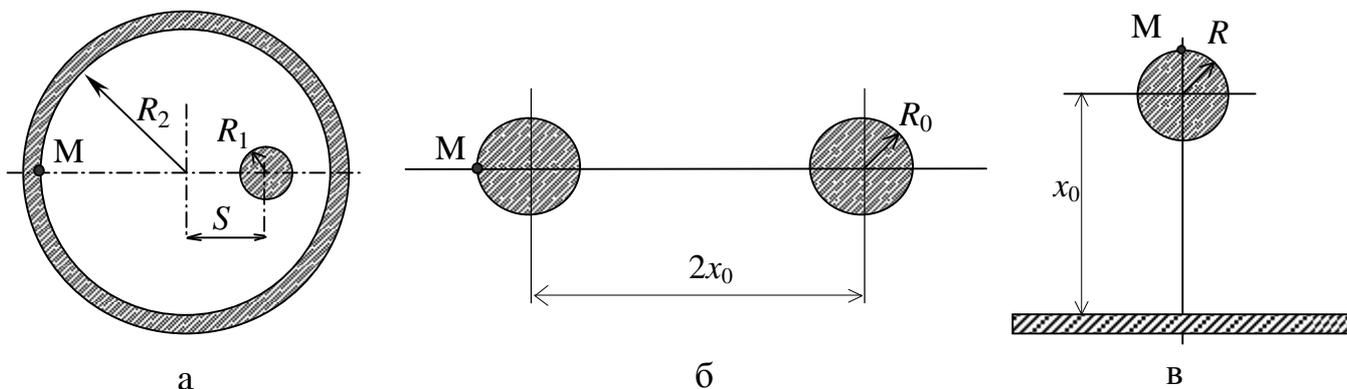


Рис 1.1. Моделируемые системы

Во второй части работы моделируется поле трехфазной системы переменного тока. Картина поля меняется во времени в соответствии с изменением разности потенциалов между проводами. Однако при низкой частоте в каждый момент времени поле может быть рассмотрено как статическое, то есть удовлетворяющее уравнению Лапласа при заданных мгновенных значениях потенциалов на проводах. Поэтому это поле для каждого момента времени можно моделировать на проводящей бумаге, задав соответствующие потенциалы на электродах.

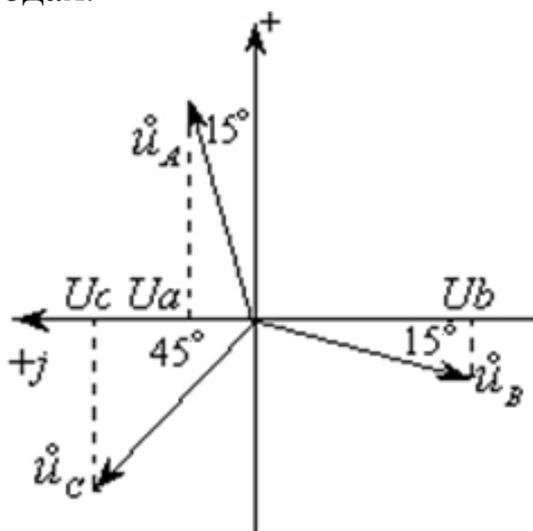


Рис 1.2. Векторная диаграмма для расчета мгновенных значений напряжений

Например, для некоторого момента времени t_1 мгновенные значения потенциалов принимают значения

$$u_A(t_1) = U_m \sin(15^\circ), \quad u_B(t_1) = -U_m \cos(15^\circ), \quad u_C(t_1) = U_m \sin(135^\circ),$$

которым соответствуют вектора $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ на векторной диаграмме (рис. 1.2). В этом случае потенциалы электродов должны иметь значения

$$u_A = 0,260U_m, \quad u_B = -0,965U_m, \quad u_C = 0,707U_m,$$

где U_m – некоторая расчетная величина, выбрать которую следует не больше $0,5 U_{\text{ист}}$. Здесь $U_{\text{ист}}$ – напряжение используемого в работе источника постоянного напряжения.

При помощи делителя напряжения расчетные значения потенциалов задают жилами A, B, C . Делитель напряжения следует брать низкоомным, чтобы сопротивление между электродами по бумаге оказалось примерно на два порядка выше, чем сопротивление делителя.

1.3 Рабочее задание

1.3.1 Часть I-я

1. Установить на листе бумаги электроды (см. рис. 1.1), сохраняя отношение размеров, принятых при расчете, выполненном при подготовке к работе.

2. Измерить с помощью мультиметра проводимость G между электродами. Рассчитать по ней емкость на единицу длины моделируемой системы и сравнить с теоретическими результатами. При расчете емкости по экспериментальным данным следует воспользоваться аналогией поля в проводящей среде и электростатического поля при одинаковых размерах и конфигурации создающих поля электродов. Тогда параметры обеих систем (в проводящей среде и в электростатическом поле) удовлетворяют соотношению [1]

$$\frac{C}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{G}{\gamma}, \quad (1.1)$$

где C – емкость между электродами в электростатическом поле; G – проводимость между теми же электродами в проводящей среде; ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость (для воздуха $\epsilon=1$); $\epsilon_0=8,86 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума.

3. Снять картину поля для одного значения S или x_0 . Эквипотенциали строить через 10 % от приложенного напряжения. Определить напряженность в точке М, по приближенной формуле $E \cong \Delta U / \Delta l$, где ΔU – шаг эквипотенциалей (10 % от приложенного напряжения), Δl – расстояние между соответствующими эквипотенциалами. Сравнить результаты с теоретическими расчетами. Измерения проводить вольтметром В7-22А или мультиметром.

1.3.2 Часть II-я

1. Определить частичные емкости трехфазной линии (рис. 1.3, а-в) по указанию преподавателя.

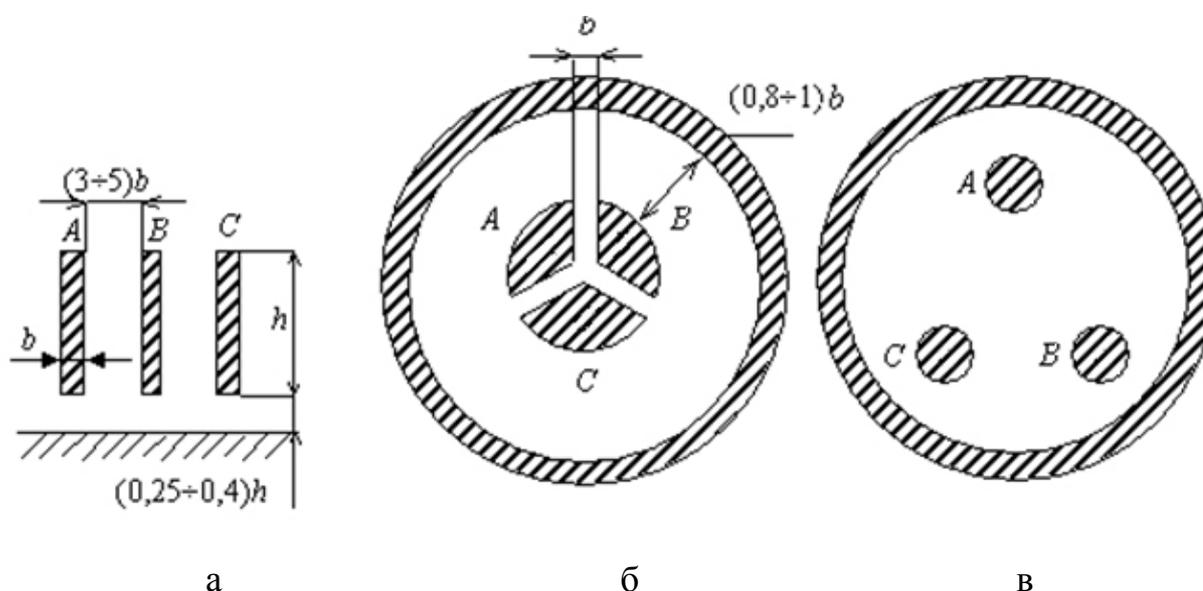


Рис 1.3. Варианты трёхфазной линии

2. При определении частичных емкостей в данной работе следует пользоваться соотношением (1.1) для полей в диэлектрике и проводящей среде, создаваемых одинаковыми системами электродов. Поэтому моделируя электростатическое поле трехпроводной линии с помощью электродов, установленных на проводящей бумаге, следует измерить мультиметром соответствующие проводимости между электродами, затем по формуле(1.1) определить частичные емкости.

3. Для определения частичных емкостей (рис. 1.4,а) следует провести следующие измерения.

Соединить накоротко жилы A , B , C (рис. 1.4,б) и измерить емкость $C'_{\Phi 0}$ между ними и нулевым электродом (оболочкой).

Замкнуть накоротко фазы B и C между собой и на оболочку (рис. 1.4,в) и измерить емкость $C'_{\Phi\Phi}$ между незаземленной жилой A и заземленными жилами B и C .

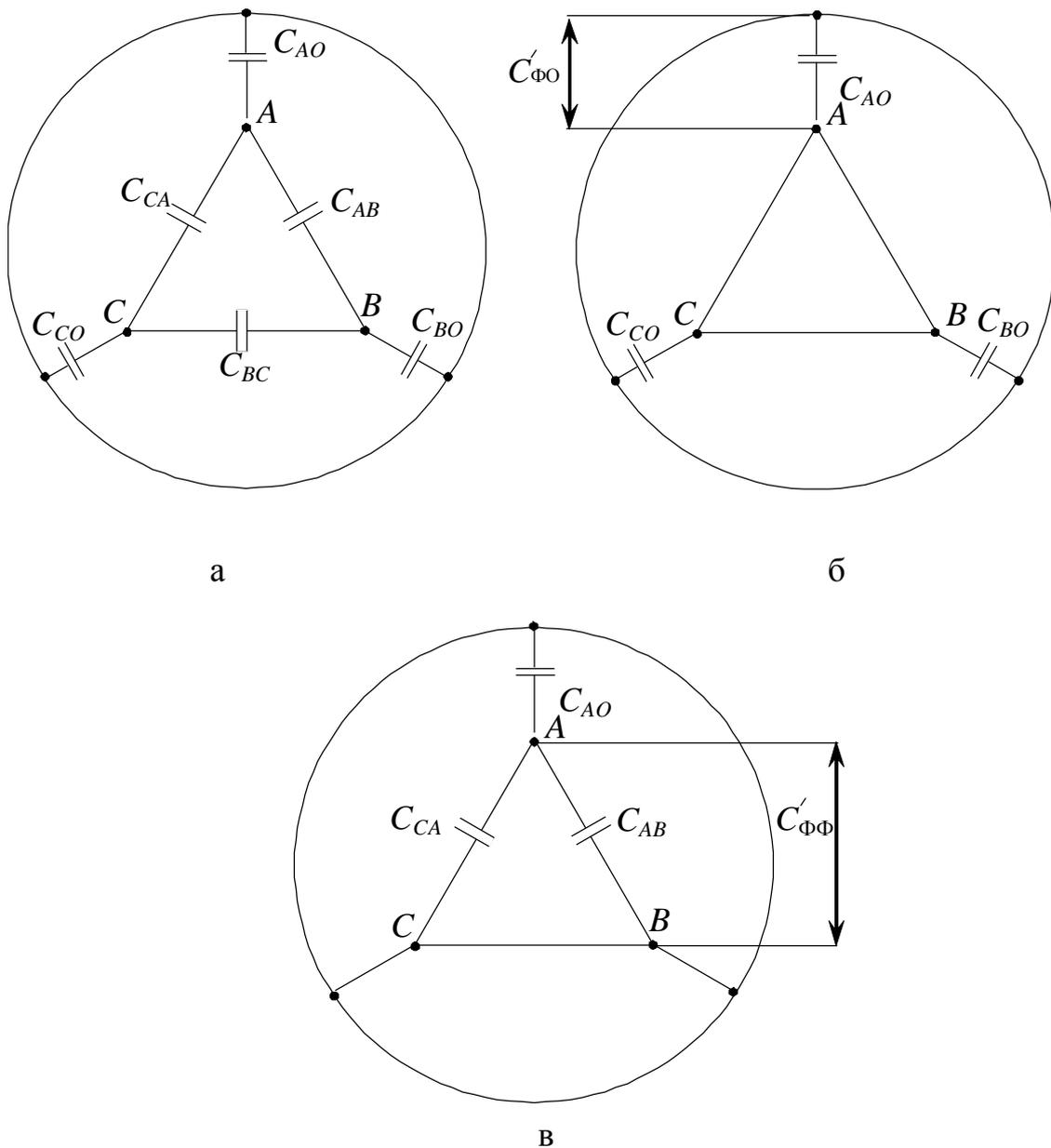


Рис 1.4. Схемы измерения частичных емкостей

Далее частичные емкости определяются следующим образом.

$$C'_{\Phi 0} = C_{AO} + C_{BO} + C_{CO} = 3C_{AO}, \text{ отсюда}$$

$$C_{AO} = C_{BO} = C_{CO} = \frac{C'_{\Phi 0}}{3}. \quad (1.2)$$

$$C'_{\Phi\Phi} = C_{AO} + C_{AB} + C_{CA} = \frac{C'_{\Phi 0}}{3} + 2C_{AB}, \text{ тогда}$$

$$C_{AB} = \frac{3C'_{\Phi\Phi} - C'_{\Phi 0}}{6}. \quad (1.3)$$

4. По данным опыта рассчитать частичные емкости на единицу длины и величину рабочей емкости фазы транспонированной (отсимметрированной) трехфазной линии.

5. Снять картину поля (линии равного потенциала) при заземленной нулевой точке генератора для момента времени, когда напряжение фазы *A* проходит через заданный угол (см. рис. 1.2). Рассчитанные ранее значения потенциалов электродов прикладывать с помощью делителя напряжения (рис. 1.5).

6. Построить силовые линии.

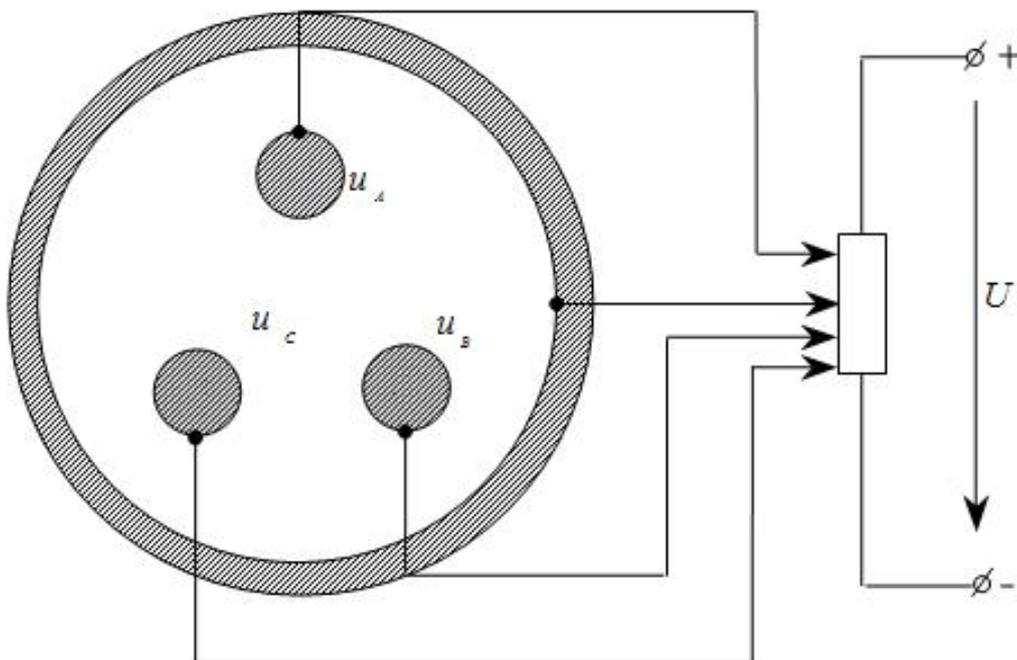
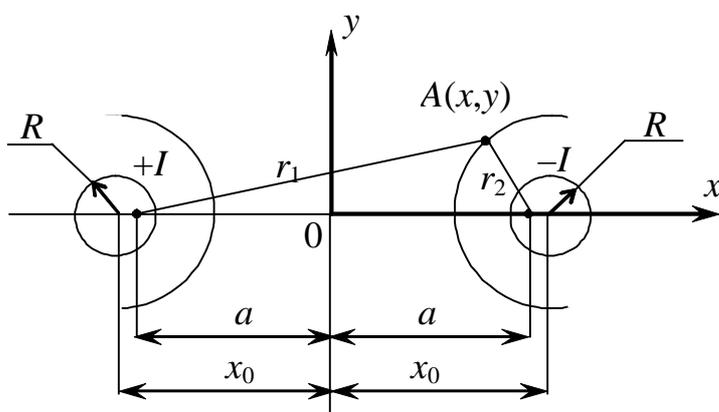


Рис 1.5. Схема подключения макета к делителю напряжений

1.4. Методические указания к расчету электрического поля двухпроводной линии



$+I, -I$ – токи растекания на единицу длины провода, сведенные в электрические оси.

Рис 1.6. Двухпроводная линия

Потенциал в произвольной точке $A[2]$:

$$U_A = \frac{I}{2\pi\gamma} \ln \frac{r_2}{r_1} + C, \quad (1.4)$$

где γ – удельная проводимость бумаги;

r_1, r_2 – расстояние от положительной и отрицательной осей;

C – постоянная, определяемая выбором нулевого потенциала; если принять $U=0$ в бесконечности на оси y , то $C=0$, а ось y будет линией нулевого потенциала.

Уравнение эквипотенциальной поверхности:

$$\frac{r_2}{r_1} = k = \text{const}. \quad (1.5)$$

Для r_1 и r_2 в декартовых координатах x, y , можно записать

$$r_1 = \sqrt{(a+x)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}. \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.5), получим уравнение окружности:

$$y^2 + (x - x_0)^2 = R^2, \quad (1.7)$$

где x_0 – расстояние от оси y до центра окружности с радиусом R .

Таким образом, получается, что уравнение эквипотенциали соответствует уравнению окружности, смещенной относительно электрических осей на величину $x_0 > a$:

$$x_0 = a \frac{1+k^2}{1-k^2}. \quad (1.8)$$

Отсюда радиус эквипотенциальной окружности $U=\text{const}$:

$$R = \frac{2ak}{1-k^2}. \quad (1.9)$$

Расчеты полей электродов по рис. 1.6 можно свести к решению аналогичной задачи о поле двух осей с токами $\pm I$.

Пример 1. Провести эквипотенциальную поверхность с потенциалом, равным 30 % от приложенного напряжения для системы электродов по рис. 1.1,а.

Электроды можно рассматривать как эквипотенциали двух осей $+I$ и $-I$. Положение осей нужно определить. Известны радиусы электродов R_1, R_2 и S – расстояние между центрами (рис. 1.7). Из (1.8) и (1.9) следует:

$$x_0^2 = R^2 + a^2. \quad (1.10)$$

Следовательно, можно составить следующую систему уравнений:

$$x_{01}^2 = R_1^2 + a^2, \quad x_{02}^2 = R_2^2 + a^2, \quad x_{02} - x_{01} = S. \quad (1.11)$$

Отсюда определяются a, x_{01}, x_{02} .

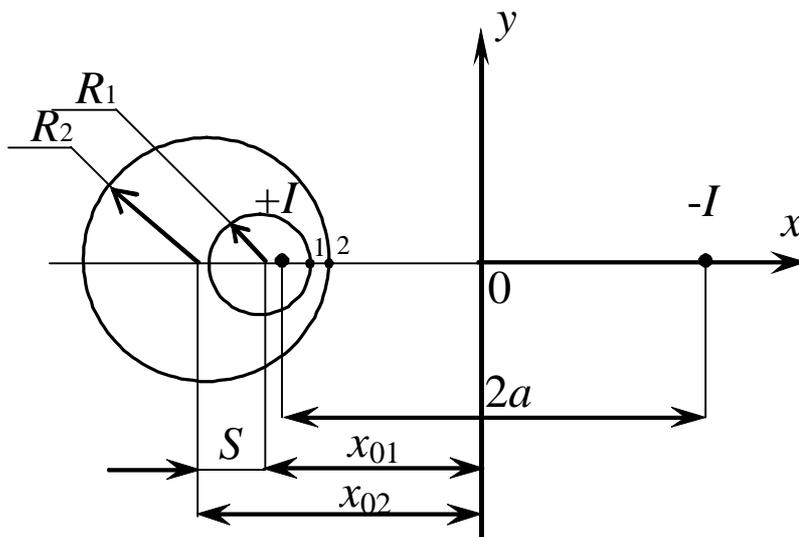


Рис. 1.7. Использование поля двухпроводной линии для расчета поля системы по рис. 1.1,а

Потенциал в точке 1:

$$U_1 = \frac{I}{2\pi\gamma} \ln \frac{a + (x_{01} - R_1)}{a - (x_{01} - R_1)} + C. \quad (1.12)$$

Подставив в знаменателе $x_{01} - a = \frac{R_1^2}{x_{01} + a}$, получим:

$$U_1 = -\frac{I}{2\pi\gamma} \ln \frac{R_1}{x_{01} + a} + C. \quad (1.13)$$

Аналогично для точки 2:

$$U_2 = -\frac{I}{2\pi\gamma} \ln \frac{R_2}{x_{02} + a} + C. \quad (1.14)$$

Из (1.13) и (1.14) получим:

$$U_1 - U_2 = U_{12} = -\frac{I}{2\pi\gamma} \ln \frac{R_1(x_{02} + a)}{(x_{01} + a)R_2} = \frac{I}{2\pi\gamma} \ln \frac{(x_{01} + a)(x_{02} - a)}{R_1 R_2}. \quad (1.15)$$

Полагая $U_{12} = 30$ В из (1.15) находим:

$$\frac{I}{2\pi\gamma} = \frac{U_{12}}{\ln \frac{(x_{01} + a)(x_{02} - a)}{R_1 R_2}}. \quad (1.16)$$

Постоянную C находим, полагая, что $U_2 = 0$. Тогда

$$C = \frac{I}{2\pi\gamma} \ln \frac{R_2}{x_{02} + a}. \quad (1.17)$$

Уравнение эквипотенциали с потенциалом $U_{03} = 0.3U_{12}$ имеет вид

$$0,3U_{12} = \frac{I}{2\pi\gamma} \ln K + C. \quad (1.18)$$

Отсюда находим K . Затем находим радиус искомой эквипотенциали и координату ее центра x_0 из уравнений (1.8) и (1.9).

Пример 2. Провести эквипотенциальную поверхность с потенциалом, равным 20 % от приложенного напряжения для электродов, изображенных на рисунке 1.1,б.

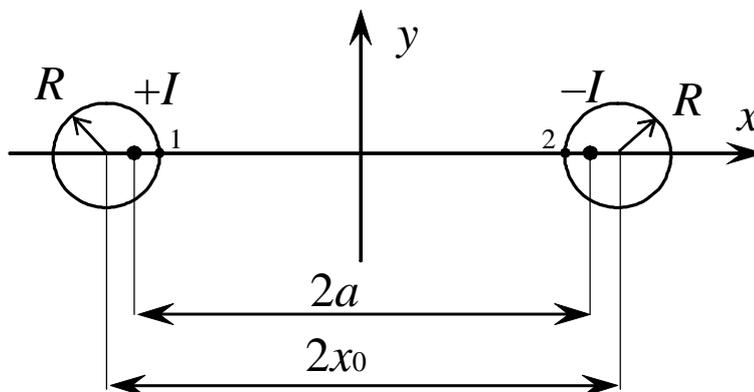


Рис. 1.8. Использование поля двухпроводной линии для расчета поля системы по рис. 1.1,б

Электроды радиусов R будем рассматривать как эквипотенциали поля двух осей с токами растекания $+I$ и $-I$.

Определяем положение осей по формуле (1.10):

$$a = \sqrt{x_0^2 - R^2}.$$

По формуле (1.13) определяем потенциал точки 1, причем в данном примере $R_1 = R_2 = R$, $x_{01} = x_{02} = x_0$, тогда $U_1 = \frac{I}{2\pi\gamma} \ln \frac{x_0 + a}{R} + C$.

Потенциал точки 2:

$$U_2 = \frac{-I}{2\pi\gamma} \ln \frac{x_0 + a}{R} + C. \quad (1.19)$$

В результате получим:

$$U_1 - U_2 = U_{12} = \frac{I}{\pi\gamma} \ln \frac{x_0 + a}{R}. \quad (1.20)$$

При известном напряжении U_{12} , приложенном к электродам, из последнего выражения определяем величину

$$\frac{I}{2\pi\gamma} = \frac{U_{12}}{2 \ln \frac{x_0 + a}{R}}. \quad (1.21)$$

Постоянную C определяем из условия, что потенциал одного из электродов равен нулю.

Если $U_2=0$, тогда

$$C = \frac{I}{2\pi\gamma} \ln \frac{x_0 + a}{R}. \quad (1.22)$$

Уравнение эквипотенциали $U=0,2U_{12}$ запишется в виде

$$\varphi_{\text{эКВ}} = \frac{I}{2\pi\gamma} \ln K + C = U. \quad (1.23)$$

Определяем K , и по выражениям (1.8) и (1.9) определяем координаты центра эквипотенциальной окружности и ее радиус.

Пример 3. Провести эквипотенциальную поверхность с потенциалом, равным 70 % от приложенного напряжения для электродов, изображенных на рисунке 1.1, в.

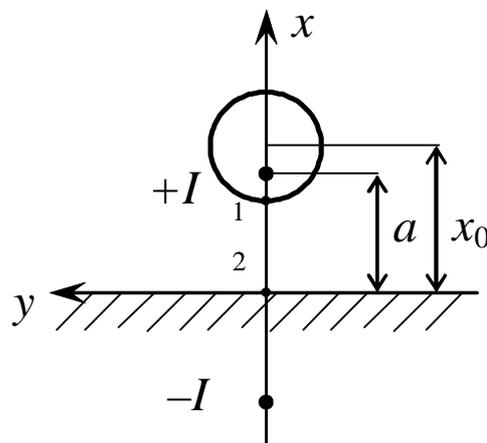


Рис. 1.9. Использование поля двухпроводной линии для расчета поля системы по рис. 1.1, в

Электрод 2 рассмотрим как бесконечную поверхность с потенциалом $\varphi_2=0$, т.е. пренебрегаем краевыми эффектами электрода 2. В этом случае поле может быть представлено полем двух осей с токами растекания $+I$ и $-I$.

Положение осей определим по формуле (1.10). Далее задача решается так же, как и в примере 2, лишь с той разницей, что $\varphi_2=0$ и постоянная $C=0$.

1.5. Контрольные вопросы

1. Вывести уравнение эквипотенциалей для двухпроводной линии.
2. Почему поле двух несоосных цилиндров можно заменить полем двух электрических осей?
3. Как определить поверхностную плотность тока на электродах?
4. Провести аналогию между электростатическими полями и электрическими полями в проводящих средах.
5. Как определить частичные проводимости трехфазной линии?
6. Как рассчитать емкость по картине поля?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

Определение емкостных коэффициентов, частичных емкостей и потенциальных коэффициентов

2.1. Цель работы

Опытное определение частичных емкостей, коэффициентов электростатической индукции и потенциальных коэффициентов четырехжильного кабеля с целью проверки существующей между ними связи. Потенциал нулевой (четвертой) жилы и потенциал оболочки приняты равными нулю (заземлены), поэтому потенциалы рабочих жил кабеля U_1, U_2, U_3 будут равны напряжениям между ними и оболочкой.

2.2. Краткие теоретические сведения

2.2.1. Схема замещения емкостных связей в кабеле и методы измерения частичных емкостей.

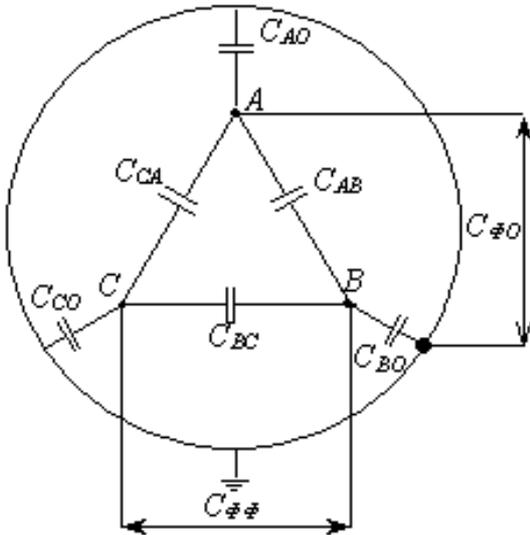


Рис. 2.1. Частичные емкости в трехфазном кабеле

Схема замещения емкостных связей в подобном кабеле имеет вид по рис. 2.1, где $C_{AO} \approx C_{BO} \approx C_{CO}$ – реальные частичные емкости фаз кабеля относительно земли, $C_{AB} \approx C_{BC} \approx C_{CA}$ – реальные частичные межфазовые емкости. При изменении каким-либо прибором емкостей между любой из фаз и нулевым проводом (землей) или между двумя фазами определяются не частичные емкости по рис. 2.1, а эквивалентные величины, обозначаемые $C_{\phi 0}$ и $C_{\phi\phi}$. Средние значения частичных емкостей кабеля равны.

$$C_{11} = \frac{C_{AO} + C_{BO} + C_{CO}}{3}, \quad C_{12} = \frac{C_{AB} + C_{BC} + C_{CA}}{3}. \quad (2.1)$$

Связь между частичными емкостями кабеля и измерительными величинами $C_{\phi 0}$ и $C_{\phi\phi}$ может быть определена двумя способами [7].

Первый способ основан на преобразовании треугольника емкостей C_{AB} , C_{BC} , C_{CA} в эквивалентную звезду и дальнейшем свертывании схемы. Этот способ дает следующие зависимости при заземлении только оболочки и нулевой жилы:

$$C_{11} = \frac{C_{\phi\phi} \cdot C_{\phi\phi}}{3C_{\phi\phi} - C_{\phi\phi}}, \quad C_{12} = \frac{2C_{\phi\phi} - C_{\phi\phi}}{3C_{\phi\phi} - C_{\phi\phi}} \cdot C_{\phi\phi}, \quad (2.2)$$

где $C_{11} = C_{22} = C_{33}$, $C_{12} = C_{21} = C_{23} = C_{32} = C_{31} = C_{13}$.

Второй способ, несколько менее удобный, состоит в следующем: соединяют накоротко жилы кабеля A , B , C и изменяют емкость $C'_{\phi 0}$ между ними и нулевой жилой и оболочкой (рис. 2.2,а).

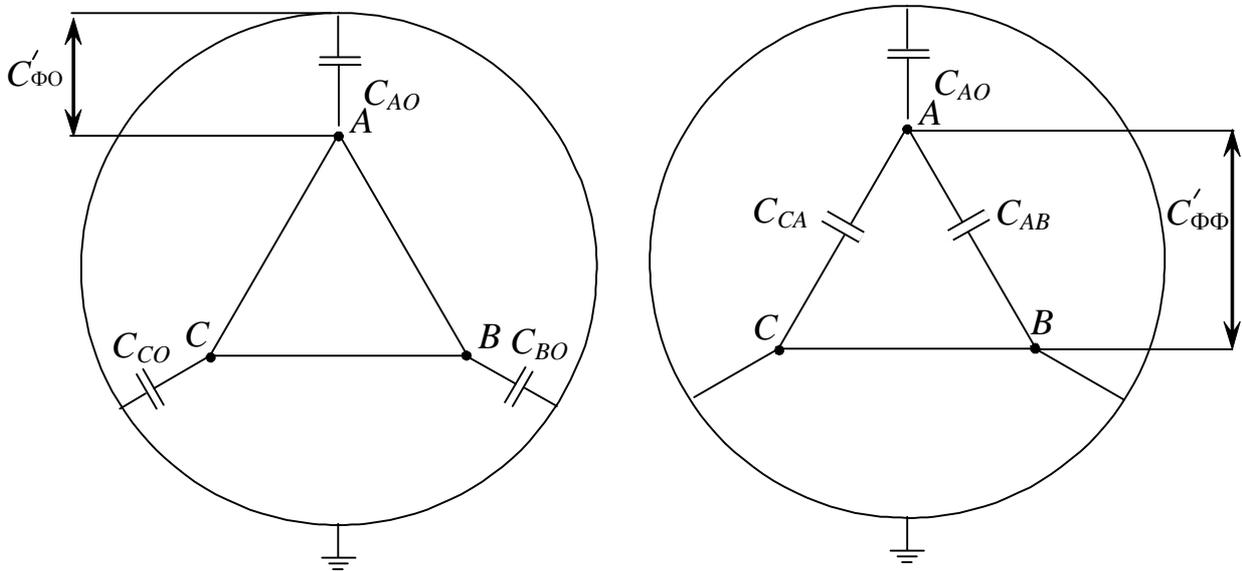


Рис. 2.2. Измерение частичных емкостей в трехфазном кабеле

Далее замыкают накоротко фазы B, C между собой и на землю (рис. 2.2,б) и изменяют емкость $C'_{\Phi\Phi}$ между незаземленной жилой A и заземленными жилами B, C . При этих измерениях частичные емкости определяются так:

$$C_{11} = \frac{C'_{\Phi 0}}{3}, \quad C_{12} = \frac{3 \cdot C'_{\Phi\Phi} - C'_{\Phi 0}}{6}. \quad (2.3)$$

2.2.2. Емкостные коэффициенты, потенциальные коэффициенты и методы их определения.

Для трехпроводной системы, образованной кабелем с глухо-заземленным нулевым проводом, справедливы следующие формулы Максвелла, в которых нижние индексы A, B, C заменены на 1, 2, 3 соответственно:

1) для заряда каждого из проводов –

$$\begin{aligned} q_1 &= C_{11}(U_1 - 0) + C_{12}(U_1 - U_2) + C_{13}(U_1 - U_3), \\ q_2 &= C_{21}(U_2 - U_1) + C_{22}(U_2 - 0) + C_{23}(U_2 - U_3), \\ q_3 &= C_{31}(U_3 - U_1) + C_{32}(U_3 - U_2) + C_{33}(U_3 - 0), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где U_1, U_2, U_3 – напряжения относительно земли проводов фаз A, B, C соответственно (см. ниже);

2) для емкостных коэффициентов β_{ik} –

$$\begin{aligned} q_1 &= \beta_{11}U_1 + \beta_{12}U_2 + \beta_{13}U_3, \\ q_2 &= \beta_{21}U_1 + \beta_{22}U_2 + \beta_{23}U_3, \\ q_3 &= \beta_{31}U_1 + \beta_{32}U_2 + \beta_{33}U_3, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $i = 1, 2, 3, k = 1, 2, 3$;

3) для потенциальных коэффициентов α_{ik} –

$$\begin{aligned} U_1 &= a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}q_3, \\ U_2 &= a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}q_3, \\ U_3 &= a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}q_3. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В системах уравнений (2.4) – (2.6) принято

$$C_{ik} = C_{ki}, \alpha_{ik} = \alpha_{ki}, \beta_{ik} = \beta_{ki}.$$

Можно доказать, что существуют дополнительные соотношения:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{13}, \\ C_{22} &= \beta_{21} + \beta_{22} + \beta_{23}, \\ C_{33} &= \beta_{31} + \beta_{32} + \beta_{33}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$C_{ik} = -\beta_{ik}, \quad i = 1, 2, 3, k = 1, 2, 3, \beta_{11} = C_{11} + C_{12} + C_{13}, \quad (2.8)$$

$$\alpha_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta}, \quad (2.9)$$

где Δ – определитель вида,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}, \quad (2.10)$$

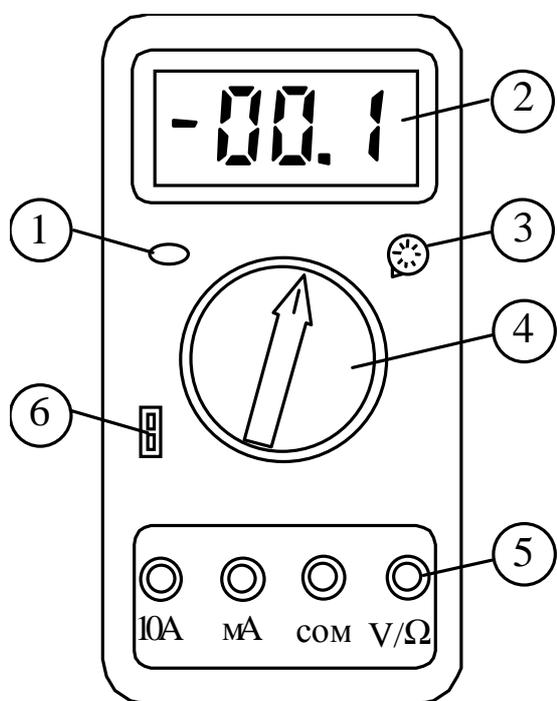
Δ_{ik} – алгебраическое дополнение определителя, полученное путем вычеркивания i -й строки и k -го столбца в определителе (2.10).

Приведенные соотношения (2.7) – (2.10) позволяют найти все параметры емкостной схемы, зная C_{ik} и C_{ii} .

2.3. Описание установки

2.3.1. Описание мультиметра.

Измерение частичных емкостей кабеля осуществляется с помощью цифрового мультиметра M890D. На рис. 2.3 показана передняя панель прибора и клавиши управления.



1. Кнопка включения питания измерительного прибора.
2. Жидкокристаллический дисплей.
3. Разъем для проверки транзисторов.
4. Переключатель функций и режимов.
5. Входные разъемы (черный «COMMON» – для подключения черного провода – щупа).
6. Разъем для подключения емкостей.

Рис. 2.3. Клавиши управления мультиметром

При работе с данным прибором необходимо выполнять следующую последовательность действий.

1. Перевести переключатель 4 в режим измерения емкостей (позиция F, диапазон измерения 200 пФ).

2. Внимание! Каждый раз до подключения прибора к измеряемой емкости необходимо убедиться в том, что она полностью разряжена. Для этого соединить проводником накоротко ее входные зажимы.

3. С помощью специальных проводников подключить измеряемую емкость к разъему 6 на передней панели прибора.

4. Включить питание прибора (кнопка 1).

5. Считать величину емкости с дисплея прибора.

6. Отсоединить прибор от емкости.

7. Выключить питание прибора.

В случае необходимости измерения величин других емкостей повторить операции, начиная с пункта 2.

Внимание! Во избежание поражения электрическим током **не допускается** изменение положения регулятора функций и режимов 4 до отключения измеряемой емкости от разъема 6.

2.3.2. Стенд с источником питания.

Для питания кабеля постоянным напряжением применяется лабораторный стенд ЛРС-1, включающий регулируемый источник выпрямленного напряжения $0 \div 250$ В.

Измерение напряжения на жилах кабеля U_1, U_2, U_3 производится электростатическим вольтметром со световым отсчетом типа С50 или мультиметром.

2.4. Подготовка к работе

2.4.1. Повторить разделы курса ТЭМП, относящиеся к анализу частичных емкостей в многопроводных цепях.

2.4.2. Подготовить бланк протокола отчета, содержащий схему цепи, используемой в эксперименте, расчетные формулы и таблицы для записи показания приборов.

2.5. Рабочее задание

2.5.1. Измерить эквивалентные емкости на землю и межфазовые емкости согласно рис. 2.1 для каждой комбинации фаз. Результаты занести в таблицу 2.1. Вычислить и записать средние значения емкостей $C_{\text{ФФ ср}}$ и $C_{\text{ФО ср}}$.

Таблица 2.1

Измерено, пФ						Вычислено, пФ	
$C_{\text{ФО}}^A$	$C_{\text{ФО}}^B$	$C_{\text{ФФ}}^{AC}$	$C_{\text{ФФ}}^{AB}$	$C_{\text{ФФ}}^{BC}$	$C_{\text{ФФ}}^{AC}$	$C_{\text{ФО ср}}$	$C_{\text{ФФ ср}}$

2.5.2. Измерить эквивалентные емкости на землю и межфазовые емкости согласно рис. 2.2. для каждой комбинации фаз. Результаты занести в таблицу 2.2.

Вычислить и записать средние значения емкостей $C'_{\text{ФО ср}}$ и $C'_{\text{ФФ ср}}$.

Таблица 2.2

Измерено, пФ						Вычислено, пФ	
$C_{\text{ФО}}^A$	$C_{\text{ФО}}^B$	$C_{\text{ФФ}}^{AC}$	$C_{\text{ФФ}}^{AB}$	$C_{\text{ФФ}}^{BC}$	$C_{\text{ФФ}}^{AC}$	$C'_{\text{ФО ср}}$	$C'_{\text{ФФ ср}}$

2.5.3. Рассчитать частичные емкости, пользуясь значениями средних емкостей, полученных в двух опытах. При расчете по результатам первого опыта (рис. 2.1) пользоваться формулами (2.2), при расчете по результатам второго опыта (рис. 2.2) пользоваться формулами (2.3), результаты расчетов занести в таблицу 2.3.

Таблица 2.3

По результатам опыта 1		По результатам опыта 2		Δ_{11}	Δ_{12}
C_{11} , пФ	C_{12} , пФ	C'_{11} , пФ	C'_{12} , пФ		

Сопоставить результаты расчетов и оценить расхождение результатов в процентах

$$\Delta = \frac{C - C'}{C} \cdot 100\% .$$

2.5.4. Подать выпрямленное напряжение $U_1=30$ В от источника стенда ЛРС-1 на нулевую жилу (минус) и одну из фаз (плюс). Измерить электростатическим вольтметром напряжение на остальных двух фазах U_2, U_3 .

2.5.5. Вычислить заряды каждой из фаз по формулам (2.4), полагая, что $C_{11}=C_{22}=C_{33}$; $C_{12}=C_{21}$; $C_{13}=C_{31}$; $C_{23}=C_{32}$.

Результаты вычисления занести в таблицу 2.4. Определить размерность зарядов фаз q_1 в системе СИ.

Таблица 2.4

q_1	q_2	q_3

2.5.6. Вычислить коэффициенты электростатической индукции β_{ii} и β_{ik} по формулам (2.7) и (2.8). Определить размерность коэффициентов в системе СИ. Результаты вычислений занести в таблицу 2.5

Таблица 2.5

β_{11}	β_{22}	β_{33}	β_{12}	β_{23}	β_{31}

2.5.7. Вычислить потенциальные коэффициенты по формулам (2.9) – (2.10). Определить их размерность в системе СИ. Результаты вычислений записать в таблицу 2.6.

Таблица 2.6

α_{11}	α_{22}	α_{33}	α_{12}	α_{23}	α_{31}

2.5.8. Сделать 3 эскиза сечения кабеля и изобразить на них приближенные картины электрического поля между жилами и оболочкой, соответствующие опытам при измерении коэффициентов β_{ii} и β_{ik} ($i=1,2,3, k=1,2,3$).

2.6. Контрольные вопросы

1. Написать три группы формул Максвелла и проанализировать, как опытным путем можно определить тот или иной параметр этих формул.

2. Чем определяются величины потенциальных коэффициентов?

3. Как определить потенциальные коэффициенты через коэффициенты электростатической индукции?

4. Как измерить собственные и взаимные частичные емкости в кабеле?

5. Как связаны коэффициенты электростатической индукции и частичные емкости?

6. В каких практических задачах используются расчеты с помощью потенциальных коэффициентов, коэффициентов электростатической индукции и частичных емкостей?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

Исследование плоскомеридианного поля на сеточной модели

3.1. Цель работы

Ознакомление с методами математического моделирования электростатических полей, описываемых уравнением Лапласа с помощью сеточной модели на примере поля у края коаксиального кабеля.

3.2. Теоретические сведения

3.2.1. Расчет сопротивлений сеточной модели

Плоскомеридианным называется поле, потенциал и напряженность которого в каждой точке с цилиндрическими координатами r , z и α не зависят от координаты α . В этом случае картина поля будет одинаковой в любой плоскости, проходящей через ось z .

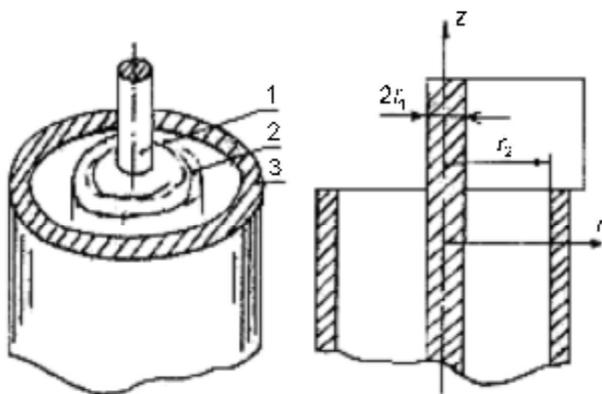


Рис. 3.1. Коаксиальный кабель

Пример такого поля – электростатическое поле коаксиального кабеля, если ось жилы совпадает с осью z в цилиндрической системе координат. На рис. 3.1. показана жила кабеля 1, изолятор 2 и оболочка 3, а также поперечное его сечение с указанием размеров.

Электростатическое поле удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 U = 0, \quad (3.1)$$

где $U(r, z)$ – потенциал поля, являющийся функцией только двух координат r и z .

В цилиндрической системе координат уравнение Лапласа запишется в виде [2]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (3.2)$$

Напряженность поля:

$$\vec{E}(r, z) = -\text{grad}U = -\vec{e}_r \frac{\partial U}{\partial r} - \vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (3.3)$$

Аналитическое решение этого уравнения в рассматриваемом случае неизвестно. Приближенное решение можно получить, смоделировав электростатическое поле на сеточной модели из сопротивлений. При этом используется аналогия электростатического поля и электрического поля в проводящей среде.

Дифференциальное уравнение (3.2) заменим разностным уравнением для пятиточечного шаблона (рис. 3.2) с неравномерным шагом [6].

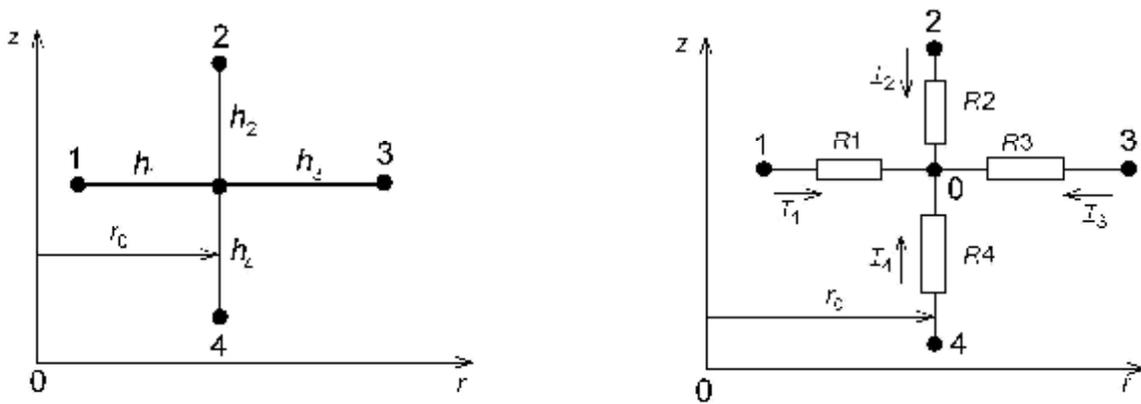


Рис 3.2. Пятиточечный шаблон

Производные заменяют разностными отношениями:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=r_0 - \frac{h_1}{2}} \approx \frac{U_0 - U_1}{h_1} \text{ — левая разностная производная на шаге } h_1,$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=r_0 + \frac{h_3}{2}} \approx \frac{U_3 - U_0}{h_3} \text{ — правая разностная производная на шаге } h_3,$$
(3.4)

$$L_1(U) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \frac{1}{r_0} \frac{\left(r_0 + \frac{h_3}{2} \right) \frac{U_3 - U_0}{h_3} - \left(r_0 - \frac{h_1}{2} \right) \frac{U_0 - U_1}{h_1}}{\frac{h_1 + h_3}{2}}, \quad (3.5)$$

$L_1(U)$ – центральная разностная производная второго порядка в точке 0 со средним шагом $\frac{h_1 + h_3}{2}$ по оси r ,

$$L_2(U) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \approx \frac{\frac{U_2 - U_0}{h_2} - \frac{U_0 - U_4}{h_4}}{\frac{h_2 + h_4}{2}}, \quad (3.6)$$

$L_2(U)$ – центральная разностная производная второго порядка в точке 0 со средним шагом $\frac{h_2 + h_4}{2}$ по оси z .

Таким образом, уравнение Лапласа принимает вид:

$$L_1(U) + L_2(U) = 0. \quad (3.7)$$

При равномерном шаге выражения (3.5) и (3.6) упрощаются и разностное уравнение Лапласа принимает вид:

$$\frac{1}{r_0} \frac{U_3 \left(r_0 + \frac{h}{2} \right) - 2U_0 r_0 + U_1 \left(r_0 - \frac{h}{2} \right)}{h^2} + \frac{U_2 - 2U_0 + U_4}{h^2} = 0$$

$$\text{или } U_3 \left(1 + \frac{h}{2r_0} \right) + U_1 \left(1 - \frac{h}{2r_0} \right) + U_2 + U_4 - 4U_0 = 0. \quad (3.8)$$

Это уравнение должно выполняться для каждого узла равномерной сетки.

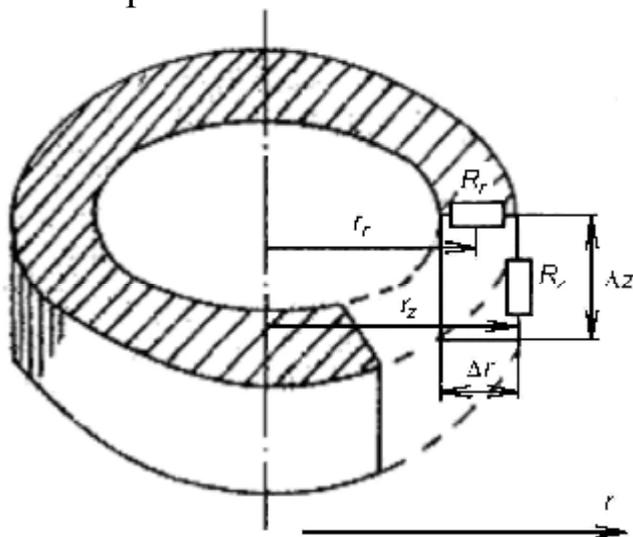


Рис. 3.3. Замена сплошной проводящей среды дискретной

На сеточной модели сплошная проводящая среда заменяется дискретной. Для плоскомеридианного поля элемент объема представляет собой кольцо (рис. 3.3). Сопротивление этого элемента в направлении оси z заменяется на сеточной модели сопротивлением R_z , а в направлении оси r – R_r .

Считая поле внутри равного объема равномерным, можно определить величины этих сопротивлений по формулам:

$$R_z = \frac{l_z}{\gamma S_z} = \frac{\Delta z}{\gamma 2\pi r_z \Delta r}, \quad R_r = \frac{l_r}{\gamma S_r} = \frac{\Delta r}{\gamma 2\pi r_r \Delta z}. \quad (3.9)$$

Если среда однородна и шаги Δr и Δz по осям выбраны равными, то расчетные формулы для сопротивлений можно записать проще:

$$R_z = \rho_0 / r_z, \quad R_r = \rho_0 / r_r, \quad (3.10)$$

где r_z и r_r – средние расстояния от оси z до центров соответствующих эквивалентных сопротивлений, замещающих элемент объема;

$$\rho_0 = \frac{1}{2\pi\gamma} \quad \text{– постоянный множитель для всей сетки, выбор}$$

которого определяется имеющимися в распоряжении сопротивлениями.

Порядок величины сопротивлений сеточной модели должен быть таким, чтобы при измерениях потенциалы не изменялись. В данной работе принято $\rho_0 = 100$ кОм·см.

В общем случае, если шаги по осям не равны (см. рис. 3.2), сопротивления следует рассчитывать по формулам:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{h_1}{\gamma S_1} = \frac{h_1}{\gamma 2\pi(r_0 - h_1/2)(h_2 + h_4)/2} = \frac{2\rho_0 h_1}{(h_2 + h_4)(r_0 - h_1/2)}, \\ R_2 &= \frac{h_2}{\gamma S_2} = \frac{h_2}{\gamma 2\pi(h_1 + h_3) \cdot r_0/2} = \frac{2\rho_0 h_2}{r_0(h_1 + h_3)}, \\ R_3 &= \frac{h_3}{\gamma S_3} = \frac{h_3}{\gamma 2\pi(r_0 + h_3/2)(h_2 + h_4)/2} = \frac{2\rho_0 h_3}{(h_2 + h_4)(r_0 + h_3/2)}, \\ R_4 &= \frac{h_4}{\gamma S_4} = \frac{h_4}{\gamma 2\pi(h_1 + h_3) \cdot r_0/2} = \frac{2\rho_0 h_4}{r_0(h_1 + h_3)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где h_1 и h_3 – шаги по оси r ;

h_2 и h_4 – шаги по оси z .

При равномерной сетке шаги $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$ формулы (3.11) принимают вид выражений (3.10).

По первому закону Кирхгофа для узла 0 (см. рис. 3.2)

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

или
$$\frac{U_1 - U_0}{R_1} + \frac{U_2 - U_0}{R_2} + \frac{U_3 - U_0}{R_3} + \frac{U_4 - U_0}{R_4} = 0. \quad (3.12)$$

Подставляя величины сопротивлений для сетки с равномерным шагом (3.10), получаем уравнение (3.8).

При неравномерной сетке уравнение (3.12) представляет собой разностное уравнение Лапласа вида (3.7).

Поле кабеля имеет бесконечную протяженность в осевом и радиальном направлениях. Для того чтобы погрешность ограничения расчетной области размерами модели не была велика, площадь сетки берется в 4–5 раз больше основной расчетной области. Для того чтобы уменьшить число сопротивлений сетки в области, удаленной от исследуемой, шаги сетки укрупняются (рис. 3.4). Расчет сопротивлений проводят по формулам (3.11). Сопротивления R_{z0} , расположенные по оси z , рассчитываются для элемента объема цилиндрической формы высотой Δz и радиуса $\Delta r/2$.

$$R_{z0} = \frac{\Delta z}{g S_z} = \frac{\Delta z}{g p (\Delta r/2)^2} = \frac{\rho_0 \cdot 8 \Delta z}{(\Delta r)^2}. \quad (3.13)$$

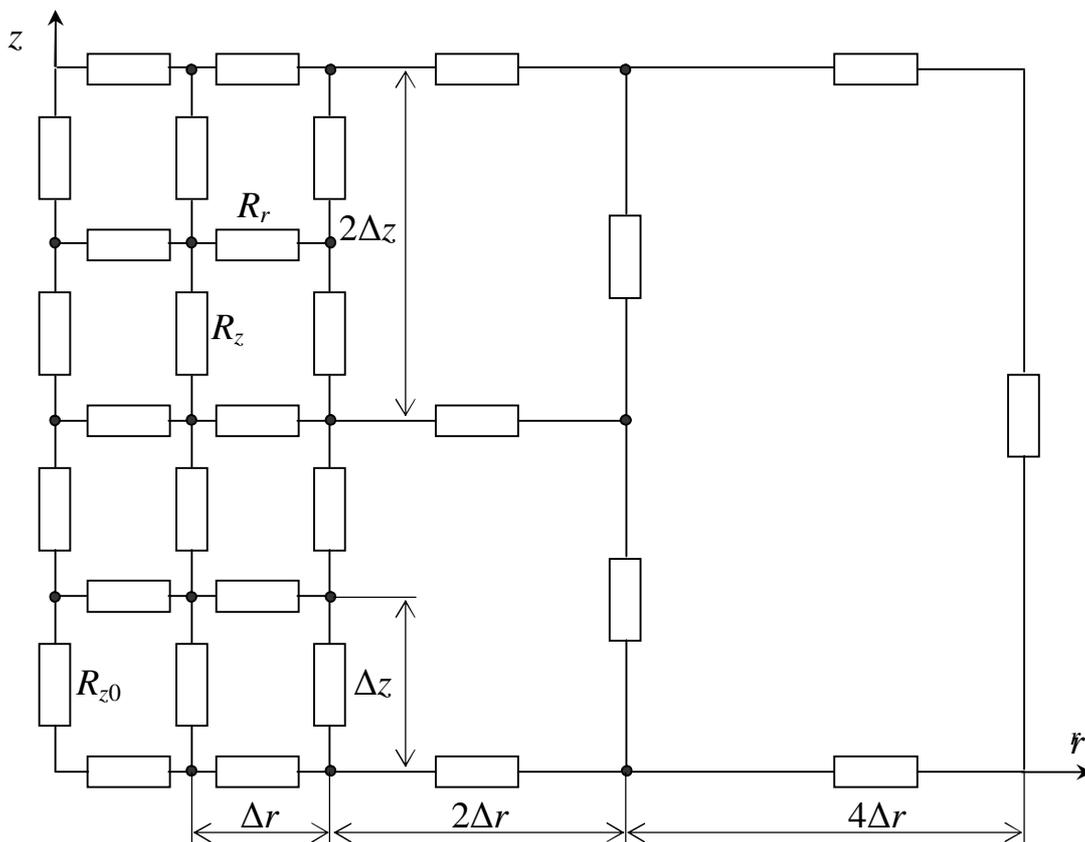


Рис. 3.4. Сетка из сопротивлений

В настоящей работе исследуется поле у края «разделки» коаксиального кабеля. Вблизи острого края оболочки возникает очень большая напряженность поля (теоретически бесконечно большая), что может привести к пробое изоляции. Для снижения этой напряженности поля можно применить закругление края оболочки, повторяющее по форме эквипотенциали вблизи острого края (рис. 3.5). При моделировании выбирается форма этого закругления и исследуется его влияние на величину напряженности поля.

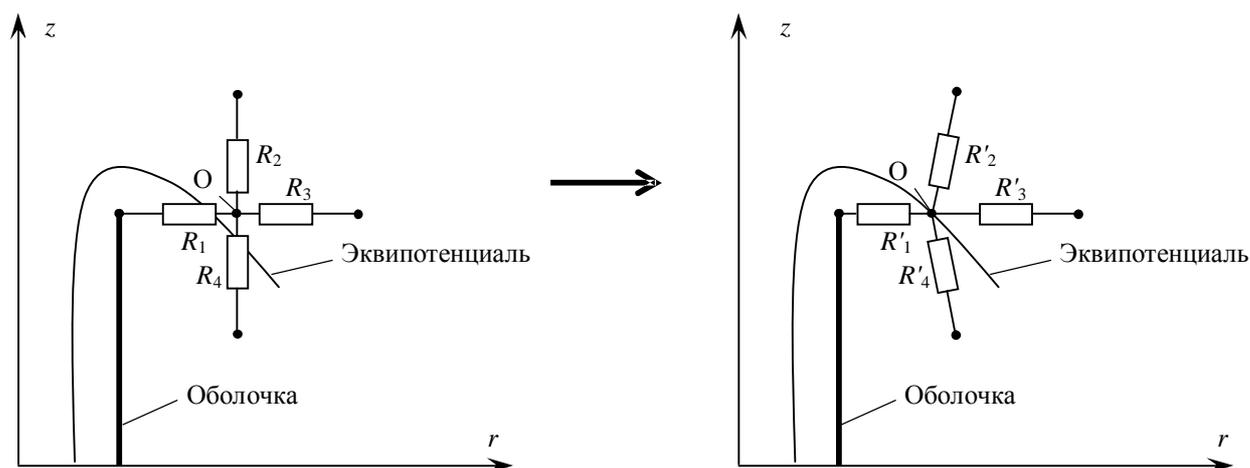


Рис 3.5. Моделирование закругления оболочки

Для моделирования закругления оболочки необходимо изменить значения сопротивлений R_1 – R_4 , прилегающих к краю оболочки, таким образом, чтобы точка O переместилась на выбранную эквипотенциаль (см. рис. 3.5). Значения сопротивлений R_1 – R_4 пересчитать по формулам (3.11), а точку O соединить с оболочкой.

3.2.2. Построение картины плоскомеридианного поля

Плоскомеридианное поле симметрично относительно оси z (оси вращения), поэтому для характеристики его достаточно моделирования и построения картины поля, т.е. эквипотенциалей и силовых линий, только в одной полуплоскости.

Уравнение $U(r, \gamma, z) = \text{const}$ определяет совокупность точек, лежащих на поверхности равного потенциала, т.е. является уравнением эквипотенциальной поверхности. Следы поверхностей равного потенциала в плоскости чертежа называют линиями равного потенциала – эквипотенциалами. Линии, к которым вектор напряженности электрического поля \vec{E} касателен в каждой точке,

называются силовыми. Картина поля строится в масштабе по результатам измерения узловых потенциалов сетки.

При построении картины электростатического поля следует соблюдать следующие условия [1]:

приращение потенциала ΔU между двумя соседними эквипотенциалами должно быть одинаковым;

силовые линии должны пересекать эквипотенциалы всюду под прямым углом, в том числе они должны быть перпендикулярны к электродам;

силовые линии должны проводиться так, чтобы поток вектора \vec{E} во всех силовых трубках $\Delta\Psi_E$ был одинаков.

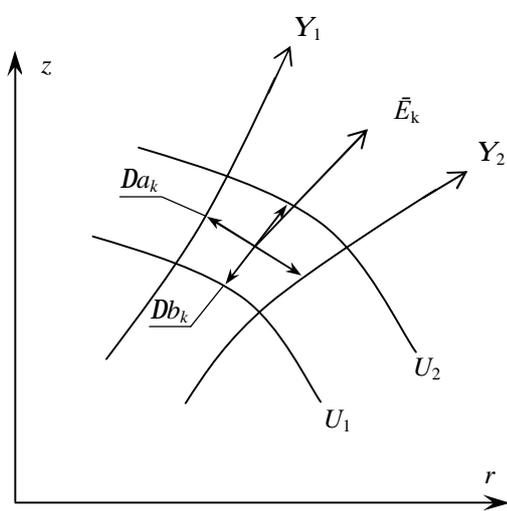


Рис. 3.6. Элементарная ячейка поля

Надо иметь в виду, что линии симметрии всегда являются силовыми или эквипотенциалами, и что из электрода, образующего угол, силовая линия выходит на биссектрисе. Для выполнения приведенных условий следует соблюдать определенное соотношение между размерами элементарной ячейки поля, образованной соседними эквипотенциалами и силовыми линиями (рис. 3.6).

Если принять в пределах элементарной ячейки ($\Delta a_k, \Delta b_k$ – малы) напряженность поля постоянной, то из условий

$$a) \Delta U = U_1 - U_2 = E_k \Delta b_k = \text{const};$$

$$б) \Delta\Psi_k = \Psi_1 - \Psi_2 = E_k \Delta a_k 2\pi r_k = \text{const}; \quad (3.14)$$

поделив одно на другое, получим

$$\frac{\Delta b_k}{\Delta a_k} = r_k \cdot \text{const}. \quad (3.15)$$

Следовательно, по мере удаления от оси z отношение расстояния между эквипотенциалами Δb_k к расстоянию между силовыми линиями Δa_k в плоскомеридианном поле должно увеличиваться пропорционально радиусу.

Картина поля между оболочкой и жилой кабеля в средней его части, где искажающий эффект края практически не сказывается, строится с использованием логарифмического закона изменения потенциала от расстояния до оси кабеля (см. рис. 3.1):

$$U = U_0 \frac{\ln(r/r_2)}{\ln(r_1/r_2)}, \quad (3.16)$$

где U_0 – напряжение между жилой (r_1) и оболочкой (r_2).

Напряженность поля в произвольной точке r определяется по картине приближенно как отношение приращения потенциала ΔU между двумя соседними эквипотенциалами к расстоянию между ними:

$$E_k = \Delta U / \Delta b_k. \quad (3.17)$$

Вектор напряженности поля направляется от большего потенциала к меньшему по нормали к эквипотенциали, проходящей через данную точку.

3.2.3. Вычисление емкости по картине поля

По определению, емкость между двумя телами равна отношению заряда на одном из тел к разности потенциалов между ними, если на телах заряды равны и противоположны по знаку

$$C = \frac{q}{U_1 - U_2}. \quad (3.18)$$

Из теоремы Гаусса заряд можно определить как

$$q = \oint_S \varepsilon \varepsilon_0 \bar{E} d\bar{s} = \varepsilon \varepsilon_0 m \Delta \psi_E,$$

где s – замкнутая поверхность, охватывающая один электрод,

m – число силовых трубок, начинающихся на рассматриваемом теле.

Если число интервалов между эквипотенциалами равно n , то

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 m \Delta \psi_E}{n \Delta U_k} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{m}{n} \frac{\Delta \psi_E}{\Delta U_k}. \quad (3.19)$$

Из правил построения картины плоскомеридианного поля следует, что

$$\frac{\Delta U_k}{\Delta \psi_E} = \text{const} = \frac{\Delta b_k}{2\pi r_k \Delta a_k} = k. \quad (3.20)$$

Определив по любой из ячеек постоянную k , вычисляем емкость

$$C = \epsilon \epsilon_0 \frac{m}{nk}. \quad (3.21)$$

Емкость длинного кабеля на единицу длины определяется по формуле:

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln(r_r/r_1)}. \quad (3.22)$$

Полную емкость кабеля конечной длины можно рассматривать как сумму емкости средней части l_{cp} , где поле практически такое же, как и в кабеле бесконечной длины

$$C_{cp} = C_0 l_{cp}, \quad (3.23)$$

и так называемой «краевой» емкости на двух концах. Последнюю можно определить по картине поля, формула (3.21), если считать, что искажение поля внутри кабеля практически отсутствует на расстоянии от края вдоль оси, равном $(r_2 - r_1)$. Тогда

$$l_{cp} = l - 2(r_2 - r_1), \quad (3.24)$$

где l – полная длина кабеля.

3.3. Пояснение к лабораторной установке

Сеточная модель для исследования поля у края коаксиального кабеля с воздушной изоляцией собрана на одной плате. На плате показаны сетка сопротивлений и электроды из фольги, моделирующие исследуемое поле в масштабе 1:1 (рис. 3.7). Осевой и радиальный шаг на модели приняты равными $\Delta r = \Delta z = 2$ см и представляют собой приращение координат в реальном поле. На лицевой стороне платы установлены градуированные переменные сопротивления $R_1 - R_6$ для моделирования закругленной оболочки кабеля. На зажимах электродов с помощью источника БП-30 устанавливается требуемое напряжение постоянного тока.

Чтобы внутреннее сопротивление вольтметра не влияло на результаты измерений потенциалов в узлах сетки, в работе используется вольтметр с большим входным сопротивлением.

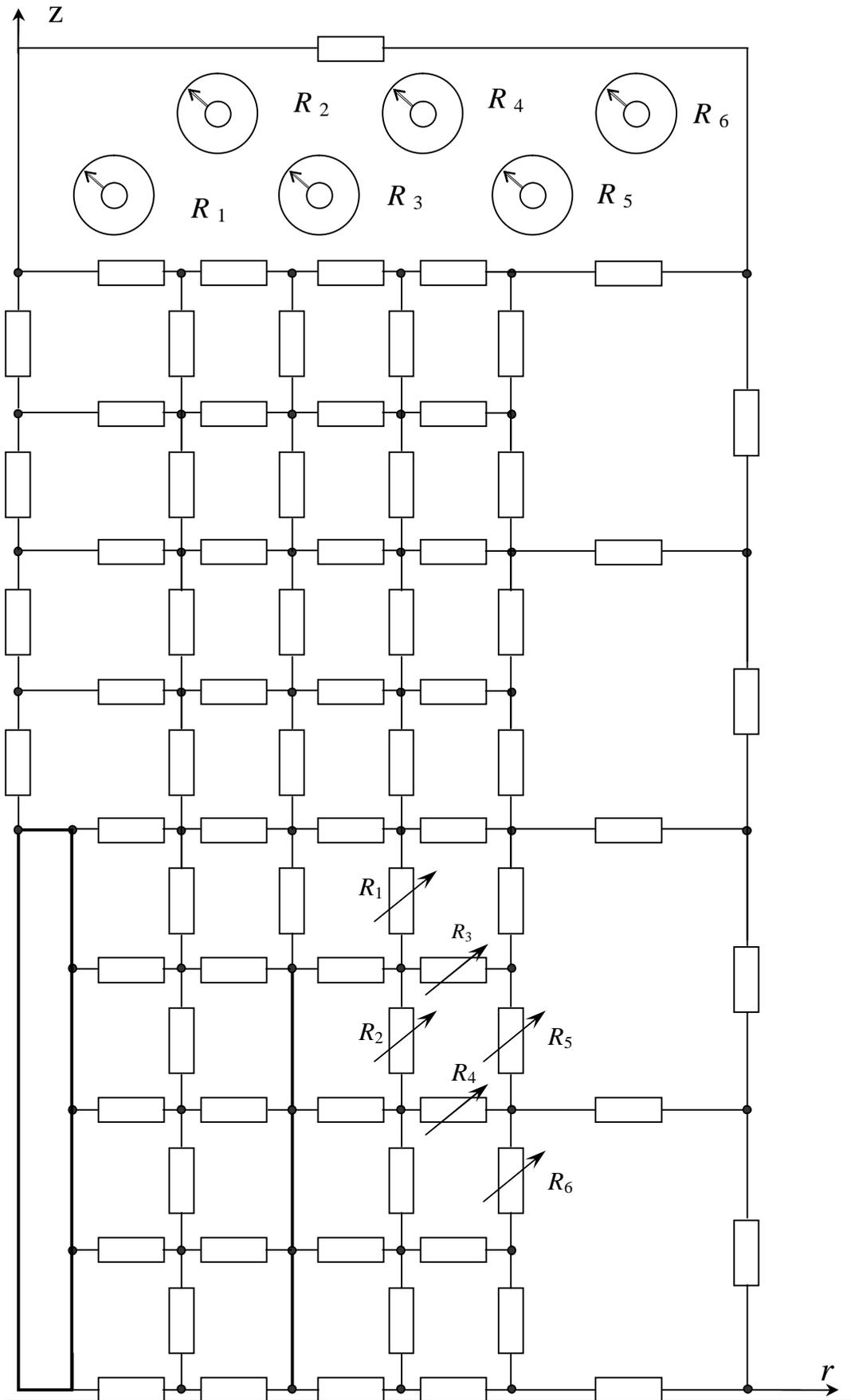


Рис 3.7. Сеточная модель

3.4. Подготовка к работе

Прочитать теоретическую часть и ответить на вопросы:

1. Что такое эквипотенциальная и силовая линии?
2. Чем отличается плоскомеридианное поле от плоскопараллельного? (привести примеры).
3. Как определить напряженность электрического поля по картине поля?
4. На чем основан принцип моделирования потенциальных полей с помощью сеточных сопротивлений?
5. Какое влияние оказывает выбор шага на точность решения задачи, учитывая, что дискретная модель заменяет сплошную среду?
6. Как рассчитывается сопротивление шага сетки?
7. Как рассчитывается сопротивление граничной полосы?
8. Как построить картину поля между оболочкой и жилой внутри кабеля на значительном расстоянии от края, где не сказывается его искажающий эффект?
9. Как рассчитываются сопротивления сетки вблизи электрода произвольной формы?
10. Чем определяется порядок величины сопротивлений сеточной модели?

3.5. Порядок выполнения работы

3.5.1. Рассчитать, используя формулы (3.10), величины сопротивлений R_1-R_6 модели ($\rho_0=100$ кОм·см) и установить их величину на модели.

3.5.2. Подключить сеточную модель к блоку питания. Выбрать величину напряжения питания $U_{\text{п}}$ (рекомендуемое напряжение 30 В).

3.5.3. Произвести измерения потенциалов в узловых точках схемы, приняв потенциал оболочки за нулевой. Построить картину поля.

3.5.4. По данным измерений построить две эквипотенциали со значениями $U_1=0,05 U_{\text{п}}$, $U_2=0,1 U_{\text{п}}$, проходящие вблизи оболочки.

3.5.5. Выбрать форму закругления оболочки такой, чтобы ее закругленная часть была между этими эквипотенциалами.

3.5.6. Рассчитать и установить новые значения сопротивлений R_1-R_6 .

3.5.7. Измерить потенциалы во всех узлах сетки.

3.5.8. По данным пункта 7 построить картину поля в масштабе 1:1 с моделью. Найти вблизи оболочки кабеля точку с максимальной напряженностью поля в пунктах 3 и 8.

3.5.9. Определить значение этой напряженности и построить на картине поля соответствующие векторы. Найти отношение максимальных напряженностей в первом и втором случаях.

3.5.10. По построенной картине поля определить «краевую» емкость кабеля.

3.6. Контрольные вопросы

1. Каковы граничные условия в электростатическом поле?
2. Почему напряженность электростатического поля в проводнике равна нулю?
3. Как определяется напряженность электростатического поля по известным $U(x,y,z)$ и $U(r,\alpha ,z)$?
4. В каких случаях электростатическое поле описывается уравнением Лапласа, в каких – Пуассона?
5. Из каких исходных положений получены формулы для расчета сопротивлений с различными шагами?
6. Какой величине в электростатическом поле пропорционален ток в сопротивлениях сетки?
7. Как рассчитывается «краевая» емкость?
8. Что такое пробивное напряжение и как по картине поля определить запас электрической прочности кабеля?
9. Каковы правила построения картины плоскомеридианного поля?
10. Как изменится картина поля, если увеличить приложенное напряжение?
11. Что и как изменится при моделировании картины поля, если изменится величина диэлектрической проницаемости диэлектрика?
12. Как можно приближенно задать криволинейную границу на сеточной области с постоянным шагом?
13. Вывести формулу для потенциала внутри кабеля вдали от края.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

Исследование распределения тока в плоском проводящем листе

4.1. Цель работы

Целью работы является получение опытным путем картины линий равного электрического потенциала и построение по ней картины линий электрического тока. Полученная опытным путем картина поля сопоставляется с картиной поля, рассчитанной теоретически.

4.2. Описание установки

Установка состоит из полосы проводящей бумаги, подвод тока к которой осуществляется посредством двух латунных брусков (рис. 4.1). Бруски плотно прижимаются к бумаге и присоединяются к источнику постоянной ЭДС. Перпендикулярно краям листа производится частичный разрез. На лист наносится сетка из взаимно перпендикулярных прямых линий, служащая для определения координат точек на его поверхности.

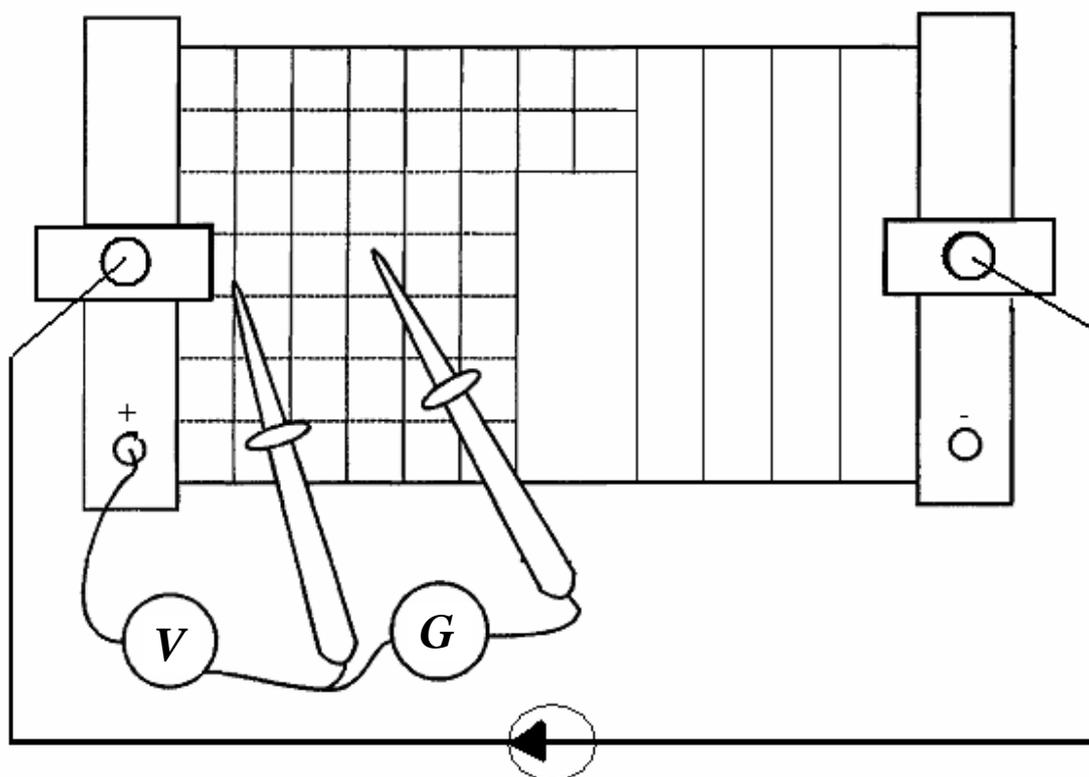


Рис. 4.1. Схема установки

Для снятия опытным путем линий равного электрического потенциала используется металлический щуп, соединенный гибким изолированным проводником с одним из зажимов вольтметра. Сопротивление вольтметра должно быть во много раз больше сопротивления исследуемого листа. Другой зажим вольтметра присоединяется к одному из латунных брусков.

Для удобства построения эквипотенциальных кривых первый щуп через чувствительный гальванометр может быть соединен со вторым щупом (см. рис. 4.1).

4.3. Подготовка к работе

Исследуемое поле соответствует полю тока в бесконечно длинной полосе с разрезом (рис. 4.2), для которой при достаточном удалении от разреза поле также является равномерным по ширине полосы. Для расчета поля воспользуемся методом конформных отображений [8]. С помощью преобразования

$$W = \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{arth} \left\{ \cos \frac{\pi h}{2d} \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{\pi z}{2d} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2d}} \right\} \quad (4.1)$$

переводим область, занятую полосой с разрезом (рис.4.2) плоскости комплексной переменной $z = x + jy$, на полосу без разреза плоскости $W = U + jV$ (рис. 4.3).

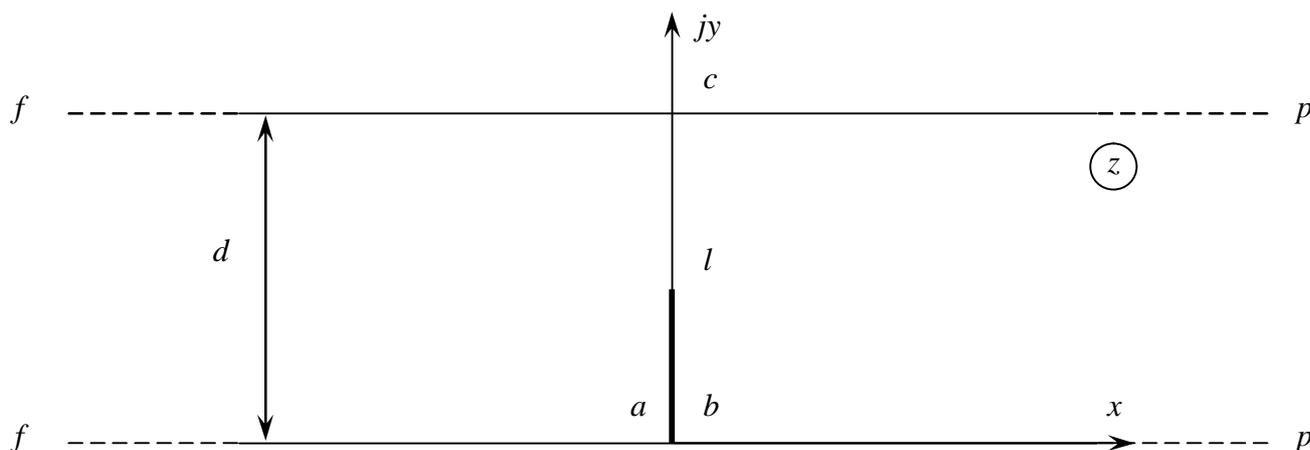


Рис. 4.2. Плоскость комплексной переменной z

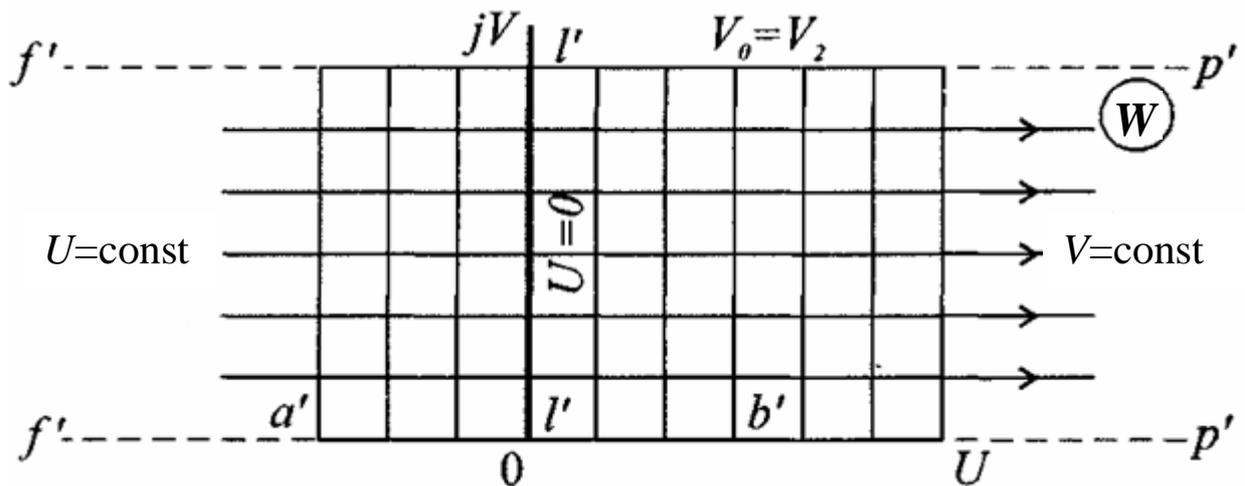


Рис. 4.3. Плоскость комплексной переменной W

Соответствие точек на границах этих областей отмечено на рис. 4.2 и 4.3. На плоскости W прямые линии $U=\text{const}$ являются линиями равного потенциала, а прямые $V=\text{const}$ линиями тока, и следовательно, аналитическая функция W является комплексным потенциалом поля бесконечной полосы с разрезом. В этой формуле величина V_0 равна значению V_2 (см. рис. 4.3) функции потока на верхней границе полосы при $y=jd$; нижней границе полосы на плоскости Z соответствует ось абсцисс на плоскости W , т.е. $V = 0$.

Согласно определению функции потока [1], $V_0 = \frac{\Psi_E}{b}$, где Ψ_E – поток вектора напряженности электрического поля в исследуемой полосе, b – толщина полосы. При достаточном удалении от разреза поле равномерно, следовательно,

$$\Psi_E = Ebd = \frac{\delta}{\gamma}bd = \frac{I}{\gamma}, \quad (4.2)$$

где γ – удельная проводимость материала полосы;

δ – плотность тока, постоянная в выбранном сечении полосы;

I – сила тока, протекающего по полосе.

Отсюда получаем

$$V_0 = \frac{I}{\gamma b}.$$

Из формулы (4.1) следует

$$\operatorname{th} \frac{\pi z}{2d} = \frac{1}{\cos \frac{\pi h}{2d}} \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{\pi W}{2V_0} - \sin^2 \frac{\pi h}{2d}}.$$

Используя соотношение $\operatorname{th} \beta = \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{e^\beta + e^{-\beta}}$, окончательно получим

$$Z = \frac{d}{\pi} \ln \frac{\cos \frac{\pi h}{2d} + \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{\pi W}{2V_0} - \sin^2 \frac{\pi h}{2d}}}{\cos \frac{\pi h}{2d} - \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{\pi W}{2V_0} - \sin^2 \frac{\pi h}{2d}}} \quad (4.3)$$

По этой формуле можно подсчитать координаты плоскости Z , соответствующие линиям тока или линиям равного потенциала.

4.4. Порядок выполнения работы

1. На лист бумаги нанести сетку, соответствующую сетке установки.

2. Измерить значение потенциалов в узлах сетки.

3. Снять линии равного потенциала. Поскольку толщина листа незначительна и одинакова для всего листа, то уже на незначительном расстоянии от места подвода и отвода тока можно считать, что линии тока по всей толщине листа параллельны поверхности листа. Следовательно, это плоскопараллельное поле. На расстоянии от разреза, превышающем ширину полосы, поле становится практически равномерным по ширине листа.

Удельная проводимость латуни во много раз больше удельной проводимости бумаги, и поэтому поверхности соприкосновения латунных брусков с бумагой по отношению к бумаге являются поверхностями равного потенциала. Так как соприкосновение латунных брусков с бумагой осуществляется не по всей плоскости брусков, прилегающей к бумаге, то в целях устранения влияния перераспределения тока вблизи мест контакта крайнюю к бруску линию равного потенциала следует снимать на некотором расстоянии от латунного бруска.

Для снятия линий равного потенциала ведут острие щупа по поверхности листа так, чтобы показание вольтметра оставалось неизменным. Ввиду симметрии поля, достаточно снять картину поля

только с одной стороны от разреза. Линии равного потенциала следует проводить одну за другой так, чтобы разность потенциалов между двумя соседними линиями везде была одной и той же. Число линий равного потенциала следует выбирать таким образом, чтобы получилась достаточно густая сетка поля, образованная этими линиями и линиями тока. Линии тока вырисовывают на основании полученных опытным путем линий равного потенциала. При этом желательно получить ячейки сетки поля такими, чтобы отношение средней длины к средней ширине каждой ячейки было равно единице и на поверхности листа уложилось 8–10 трубок равного тока.

Если координатная сетка на поверхности листа проведена так, что на ширине листа укладывается 8–10 квадратов, то для выполнения указанного выше условия достаточно измерить падение напряжения, приходящееся на один из ближайших к латунным пластинам квадрат, где поле однородно, и в дальнейшем при снятии картины поля удерживать такую же разность потенциалов между всеми соседними эквипотенциальными линиями.

4. Нанести значения потенциалов в узлах бумажного листа. Построить линии равного потенциала и линии тока.

При проведении линий тока необходимо добиваться соблюдения следующих условий:

1) линии тока всюду должны быть перпендикулярны к линиям равного потенциала;

2) ячейки сетки, образуемой линиями тока и линиями равного потенциала, должны иметь одинаковое для всех ячеек отношение средней длины Δl ячейки в направлении линий тока к средней ширине Δa в направлении линий равного потенциала.

Рекомендуется строить линии тока через такие интервалы, чтобы имело место равенство $\Delta l = \Delta a$, т.е. чтобы ячейки сетки представляли собой криволинейные квадраты. Если воспользоваться указанной выше рекомендацией выбора величины разности потенциалов между соседними линиями равного потенциала, то при соблюдении условия $\Delta l = \Delta a$ весь лист окажется подразделенным линиями тока на целое число трубок одинакового тока. Если эта рекомендация не была использована или была использована с недостаточной точностью, то может оказаться, что при соблюдении условия $\Delta l = \Delta a$ не удастся разделить весь лист на целое число трубок одинакового тока. Тогда одна из крайних трубок будет содержать не квадраты, а

прямоугольники, и ток в этой трубке составит долю тока в каждой из остальных трубок, равную отношению $\Delta a / \Delta n$ для этих прямоугольников.

5. Определить удельную проводимость материала полосы. Для этого берётся квадратная полоска проводящей бумаги и измеряется её сопротивление, для этого на края полоски помещаются латунные бруски, плотно прижатые к бумаге. Измеряется сопротивление либо омметром, либо рассчитывается по закону Ома, т.е. отношением напряжения на полоске к току.

$$R' = \frac{U}{i} = \frac{l'}{\gamma b d'},$$

т.к. $l' = d'$ – полоска квадратная, то

$$R' = \frac{1}{\gamma b},$$

отсюда

$$\gamma b = \frac{1}{R'}.$$

6. Провести теоретический расчёт картины поля. Построение картины удобнее начинать с линии Cl , являющейся продолжением линии разреза. Вследствие симметрии линия Cl является линией равного потенциала. Поступая таким образом, мы получим симметричную относительно разреза сетку поля. Следует обращать внимание на то, чтобы получающееся поле удовлетворяло граничным условиям у краев листа. Так как края листа являются линиями тока, то линии равного потенциала должны подходить к ним перпендикулярно. Для этого следует задаться определенным значением потенциала, и для ряда значений V подсчитать координаты этой линии равного потенциала по формуле (4.3). Для того чтобы теоретическая картина поля соответствовала экспериментальной, необходимо между соседними линиями равного потенциала иметь то же приращение потенциала, что и в условиях опыта. Начальной линией равного потенциала Cl соответствует на плоскости W отрезок на мнимой оси i , следовательно, $U = 0$.

Аналогично можно построить картину линий тока, задаваясь определенным значением V , соответствующим значению функции потока на картине поля, и для ряда значений U подсчитывая

координаты точек этой линии тока. Значения функции потока определяются из условия, что приращение потока между соседними линиями тока должно быть равно $\frac{V_0}{m}$, где m – число трубок на построенной по экспериментальным данным картине поля. Значение функции потока V_0 на верхней границе листа определяется силой тока, удельной проводимостью материала и толщиной бумаги. Если при расчете линий равного потенциала выбирать значения функции потока, исходя из этого же условия, то отпадает надобность в специальном расчете линий тока. Достаточно на построенной расчетной картине линии равного потенциала соединить точки, соответствующие равным значениям функции потока. Рассчитанная теоретически картина поля сопоставляется с картиной поля полученной опытным путем.

7. Измерить удельную проводимость листа проводящей бумаги установки и его сопротивление.

8. Рассчитать сопротивление листа по построенной картине поля по формуле:

$$R = \frac{1}{\gamma b} \cdot \frac{n}{m},$$

где n – число интервалов между линиями равного потенциала;
 m – число трубок тока.

Сопоставить полученное сопротивление по картине поля с найденным путем непосредственного измерения на установке.

4.5. Контрольные вопросы

1. Какое преобразование называется конформным?
2. Какие канонические области вы знаете?
3. Как связан вектор напряженности электрического поля E и комплексный потенциал плоскопараллельного поля?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Определение размагничивающих факторов тел разной формы

5.1. Цель работы

Целью работы является изучение зависимости намагничивания тела от его формы и наблюдение явления магнитного экранирования.

5.2. Краткие теоретические сведения

Если поместить ферромагнитное тело в однородное внешнее поле, то оно намагничивается. Внутри тела устанавливается магнитная индукция \overline{B} и напряженность \overline{H} , связанные соотношением

$$\overline{B}_1 = \mu_0 (\overline{H}_1 + \overline{M}_1), \quad (5.1)$$

где μ_0 – абсолютная магнитная проницаемость вакуума;

\overline{M}_1 – намагниченность вещества, возникшая от воздействия внешнего поля \overline{H}_0 .

Напряженность поля внутри тела можно представить в виде двух слагаемых: напряженности внешнего поля \overline{H}_0 и напряженности, обусловленной намагниченностью \overline{H}_M :

$$\overline{H}_1 = \overline{H}_0 + \overline{H}_M. \quad (5.2)$$

Аналогичные явления происходят в диэлектриках: если внести диэлектрик в однородное электрическое поле, тело поляризуется. Если внешняя среда имеет значение ϵ_{r2} равное единице, то заряды поляризации определяются только поляризацией образца, и результирующее поле можно представить в виде суммы напряженности внешнего однородного поля \overline{E}_0 и дополнительного поля, обусловленного поляризацией \overline{E}_p

$$\overline{E}_1 = \overline{E}_0 + \overline{E}_p. \quad (5.3)$$

Поле поляризации \overline{E}_p легко объясняется возникновением на поверхности диэлектрика связанных зарядов, равных разности нормальных составляющих вектора поляризации по обе стороны границы раздела:

$$\sigma_S = P_{1n} - P_{2n}. \quad (5.4)$$

На основании формальной аналогии между электростатикой и магнитостатикой появление слагающей поля, обусловленной намагниченностью самого тела, можно объяснить возникновением «связанных магнитных зарядов»

$$\sigma_{MS} = M_{1n} - M_{2n}, \quad (5.5)$$

где M_{1n} и M_{2n} – нормальные составляющие вектора намагниченности в образце и в окружающей среде (в исследуемом случае $M_{2n} = 0$).

Понятие магнитных зарядов вводится лишь для удобства расчетов и физического смысла не имеет. Эллипсоидальные образцы (шары – частный случай) обладают замечательным свойством однородно намагничиваться во внешнем однородном поле, неэллипсоидальные – намагничиваются неоднородно. Наличие магнитных полюсов на поверхности (поверхностная дивергенция вектора намагниченности) и в объеме (объемная дивергенция) приводят к возникновению дополнительного магнитного поля, напряженность которого направлена против внешнего поля. Поэтому поле называют размагничивающим. Размагничивающее поле неэллипсоидальных тел, помещенных во внешнее однородное поле, будет неоднородным, отсюда неоднородность результирующего поля (рис.5.1).

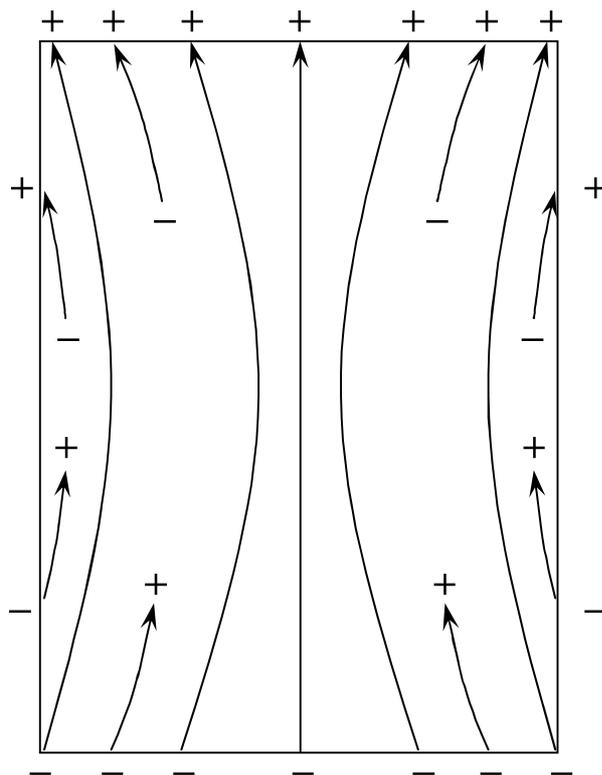


Рис. 5.1. Размагничивающее поле цилиндра

Индукция внутри размагничивающего тела $\bar{B}_1 = \mu_0 \mu_r \bar{H}_1$, так как $\bar{H}_1 < \bar{H}_0$, то $\bar{B}_1 = \mu_0 \mu_r \bar{H}_1 < \mu_r \bar{B}_0$, т.е. возрастает менее чем в μ_r раз по сравнению с \bar{B}_0 (индукцией внешнего однородного поля). Величина размагничивающего поля в значительной мере зависит от формы тела.

Для примера рассмотрим случай равномерного намагничивания цилиндра бесконечной длины, внесенного в однородное поперечное поле

$$\bar{H}_1 = \bar{H}_0 \frac{2}{\mu_r + 1} = \bar{H}_0 - \bar{H}_0 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}, \quad (5.6)$$

откуда

$$\bar{H}_M = \bar{H}_1 - \bar{H}_0 = -\bar{H}_0 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} = -\frac{\mu_r - 1}{2} \bar{H}_1 = -\frac{1}{2} \bar{M}_1. \quad (5.7)$$

Таким образом, внутри цилиндра, ось которого перпендикулярна вектору напряженности внешнего поля, слагающая напряженности поля, вызванная намагниченностью \bar{M}_1 , направлена навстречу напряженности внешнего поля \bar{H}_0 и пропорциональна намагниченности. Напряженность поля внутри тела меньше напряженности внешнего поля.

Индукция внутри тела

$$\bar{B}_1 = \mu_0 \mu_r \bar{H}_1 = \mu_0 \mu_r \bar{H}_0 \frac{2}{\mu_r + 1} = \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} \bar{B}_0, \quad (5.8)$$

т.е. увеличилась меньше, чем в μ_r раз по сравнению с индукцией внешнего поля \bar{B}_0 . Если $\mu_r \gg 1$, то $\bar{B}_1 \approx 2\bar{B}_0$, т.е. при больших μ_r индукция внутри цилиндра, помещенного в поперечное внешнее поле, увеличивается всегда в два раза, независимо от диаметра и величины μ_r .

Для характеристики размагничивающего действия тела вводят коэффициент размагничивания (размагничивающий фактор) N , определяемый отношением размагничивающего поля к намагниченности

$$N = \frac{H_M}{M_1} = \frac{H_0 - H_1}{M_1}. \quad (5.9)$$

Для бесконечно длинного цилиндра, помещенного в поперечное однородное поле, $N = -1/2$, для шара $N = -1/3$, для пластины $N = -1$, для бесконечного цилиндра, помещенного в продольное поле $N = 0$. Последнее легко объясняется тем, что для длинного цилиндра поле торцов не влияет.

Для неоднородно намагничивающихся тел (например, коротких цилиндров) размагничивающий фактор должен быть выражен в виде тензорной функции координат и в каждой точке тела будет различен. Очень часто интересуются не линейным значением размагничивающего фактора, а тем, как реагирует образец в среднем на внешнее поле. Одной из таких характеристик является баллистический размагничивающий фактор, он определяется как среднее значение пространственно изменяющегося размагничивающего фактора в плоскости, перпендикулярной к направлению приложенного поля на середине между торцами образца.

Для экспериментального определения размагничивающего коэффициента нужно измерить магнитный поток в среднем сечении, знать напряженность внешнего поля $\overline{H_0}$ и магнитную проницаемость μ_r . Расчет можно проводить по формуле

$$N = \frac{H_0 - H_1}{M_1} = \frac{H_0 - H_1}{H_1(\mu_r - 1)} = \frac{H_0/H_1 - 1}{\mu_r - 1} = \frac{\frac{\mu_0 \mu_r H_0}{B_0} - 1}{\mu_r - 1}. \quad (5.10)$$

Для ферромагнитных материалов $\mu_r \gg 1$, тогда

$$N \approx \frac{H_0/H_1 - 1}{\mu_r} = \frac{\mu_0 H_0}{B_1} + \frac{1}{\mu_r} = \frac{B_0}{B_1} - \frac{1}{\mu_r}, \quad (5.11)$$

или с еще одним приближением можно записать $N \cong B_0/B_1$.

При помещении в магнитное поле полого тела из ферромагнитного материала с $\mu_r \gg 1$, поле внутри полости будет ослаблено. Это явление получило название магнитного экранирования.

5.3. Описание установки

Однородное магнитное поле создается в работе при помощи катушек Гельмгольца, то есть двух катушек, имеющих общую ось и расположенных в параллельных плоскостях на расстоянии, равном их

радиусу. При этом магнитное поле в среднем пространстве можно считать практически однородным. Рабочая схема приведена на рис. 5.2. Каждая катушка содержит $W=125$ витков. Магнитный поток (средняя индукция) в образцах измеряется микровеберметром с помощью измерительных катушек, параметры которых приведены на стенде.

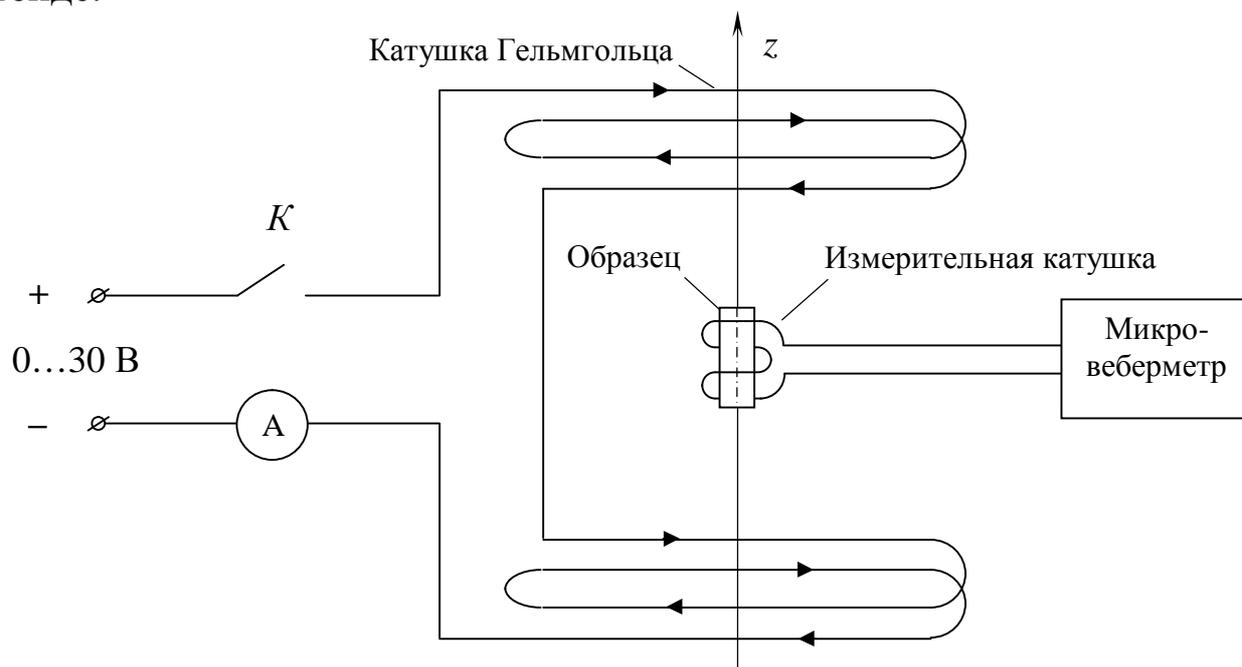


Рис. 5.2. Схема установки

В работе исследуются поля и размагничивающие факторы шаров разных диаметров, цилиндров с различным соотношением длины к диаметру и магнитного экрана. Все образцы и экран выполнены из стали и имеют $\mu_r \gg 1$. Размеры и магнитная характеристика образцов и экрана приведены на стенде.

5.4. Подготовка к работе

1. Ознакомиться с описанием работы и указанной литературой.
2. Определить понятие размагничивающего фактора N и указать его влияние на результирующее поле.
3. Получить теоретические значения размагничивающих факторов для шара, тонкого диска и длинного цилиндра, расположенного поперек и вдоль оси намагничивающих катушек.
4. Рассчитать поле на оси катушек Гельмгольца. Построить кривую $B_z(z)$ в относительных единицах (z – расстояние от центра катушек по оси).

5. Привести формулу для вычисления поля внутри цилиндрического экрана и коэффициента ослабления $K = B/B_0$ (B – индукция внутри экрана). Дать качественное объяснение экранирующему действию.

5.5. Рабочее задание

5.5.1. Прежде чем начать измерения, прочитайте п. 8 «Порядок работы с микровеберметром». При измерении индукции образец необходимо располагать в наиболее однородной части внешнего поля, а измерительную катушку так, чтобы ее ось совпадала с направлением измеряемой составляющей поля. Параметры измерительной катушки заданы на стенде.

5.5.2. Измерить магнитное поле вдоль оси намагничивающих катушек при токе в них $I = 1\text{А}$. На графике, рассчитанном при подготовке к работе, построить зависимость $B_z(z)$, полученную экспериментально. Измерить осевую и радиальную составляющие поля катушек на заданном расстоянии a от оси. Построить зависимости $B_z(z)$ и $B_r(z)$.

5.5.3. Измерить индукцию в средних сечениях шаров различных диаметров, внесенных во внешнее поле \overline{H}_0 . Вычислить их размагничивающий фактор – по упрощенной формуле.

5.5.4. Измерить индукцию в средних сечениях всех цилиндров с различным отношением l/d , помещенных в однородное внешнее поле вдоль оси катушек Гельмгольца. Построить график $B_z(l/d)$, где l – длина цилиндра, d – диаметр.

5.5.5. Измерить индукцию в среднем сечении стального цилиндра ($l/d > 10$), помещенного перпендикулярно направлению внешнего поля. Вычислить его размагничивающий фактор.

5.5.6. Измерить индукцию внутри стального полого цилиндра. Вычислить коэффициент ослабления экрана.

5.5.7. Измерить поле на оси катушек Гельмгольца и на заданном расстоянии a от нее при помещении в однородное поле \overline{H}_0 двух шаров с различными диаметрами (поочередно) или двух стальных цилиндров с разным соотношением l/d . Построить зависимости $B_z(z)$ и $B_r(z)$.

5.6. Анализ полученных результатов

5.6.1. По данным опытов рассчитать и построить на одном графике зависимость размагничивающей напряженности \overline{H}_M и размагничивающего фактора N от отношения l/d (длины к диаметру) всех цилиндров.

5.6.2. Сравнить поле на оси катушек без образца и с образцами по данным пп.5. 5.2 и 5. 5.7. Объяснить различие кривых $B_z(z)$ и $B_r(z)$.

5.6.3. То же, что и в п.5.5.2, но для поля на расстоянии a от оси.

5.6.4. Построить векторы поля \overline{B} в 2–3 точках на расстоянии a от оси катушек для тех же образцов, что в п. 5.5.7.

5.6.5. Сравнить теоретическое и экспериментальное значения коэффициента ослабления цилиндрического экрана.

5.7. Указания к расчету

Изменение потока $\Delta\Phi$ создается изменением тока в катушках Гельмгольца от 1А до 0А, т.е магнитный поток изменяется от $+\Phi$ до 0. Приращение потока $\Delta\Phi$ измеряется с помощью микровеберметра Ф192. Принцип действия микровеберметра следующий: на «вход» подключается измерительная катушка, при изменении магнитного потока в ней наводится ЭДС $e = -W_K \frac{d\Phi}{dt}$, где W_K – число витков измерительной катушки, Φ – магнитный поток, сцепляющийся с измерительной катушкой. При расчёте индукции нужно учесть, что микровеберметр покажет изменение потокосцепления

$$\Delta\psi = W_K \Delta\Phi .$$

Индукция определится как

$$B = \frac{\Delta\psi}{W_K \cdot S_K} ,$$

где S_K – сечение измерительной катушки, $\Delta\psi$ – показания микровеберметра.

Расчет индукции на оси катушек Гельмгольца проводится по формуле:

$$B = \frac{IW}{2} \cdot \frac{\mu_0 R^2}{\left[R^2 + \left(\frac{n}{2} + z \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{IW}{2} \cdot \frac{\mu_0 R^2}{\left[R^2 + \left(\frac{n}{2} - z \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} , \quad (5.12)$$

где W – число витков одной катушки Гельмгольца; R – радиус катушки Гельмгольца; n – расстояние между плоскостями катушек; z – расстояние от центра катушек вверх (или вниз) по оси.

Коэффициент ослабления индукции внутри цилиндрического экрана в том случае, когда ось полого цилиндра перпендикулярна силовым линиям поля

$$K = B_1 / B_0 = \frac{4d_2^2}{\mu_r(d_2^2 - d_1^2)}, \quad (5.13)$$

где d_1, d_2 – внутренний и внешний диаметры экрана;
 μ_r – относительная магнитная проницаемость экрана.

5.8. Порядок работы с микровеберметром

1. Перед измерениями установить с помощью корректора указатель микровеберметра на нулевую отметку.
2. Включить кнопки «НУЛЬ» и «СЕТЬ». При этом должен засветиться индикатор включения сети.
3. Прогреть прибор в течение 15 минут.
4. Установить пределы и измеряемый диапазон -25–0–25 мВб.
5. Подключить к входным зажимам измерительную катушку.
6. Режим компенсации дрейфа показаний принять автоматический (нажать кнопку «АВТ»).
7. Нажать кнопку «Ф» и включением ключа К произвести изменение измеряемого магнитного потока и произвести отсчет.
8. Включить кнопку «НУЛЬ», после чего прибор готов для последующего измерения.

5.9. Контрольные вопросы

1. Написать основные уравнения для магнитостатических полей.
2. Провести аналогию между электростатикой и магнитостатикой.
3. Что называется размагничивающим фактором?
4. Как определить размагничивающий фактор опытным путем?
5. Как рассчитать аналитически размагничивающий фактор для бесконечного цилиндра, ось которого перпендикулярна направлению внешнего поля, для шара?
6. Вывести коэффициент экранирования цилиндрического экрана.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6

Исследование преломления линии электрического тока на границе раздела двух сред с различными удельными проводимостями

6.1. Цель работы

Целью работы является исследование характера преломления линий тока на границе раздела двух сред с различными удельными проводимостями.

6.2. Описание установки

Установка состоит из плоского железного листа шириной $2c$ и длиной $2b$, в середине которого сделан круглый вырез и впаян круг из листовой меди (рис.6.1). На поверхность листа нанесены неглубокими царапинами прямоугольная координатная сетка. К двум противоположным сторонам железного листа припаяны толстые медные бруски, служащие для подвода тока к листу. Установка питается от источника постоянного напряжения БП-30 через сопротивление 15 Ом. Для снятия опытным путем потенциалов в узлах сетки используется микро-вольтметр постоянного тока В2-15, к которому присоединен щуп.

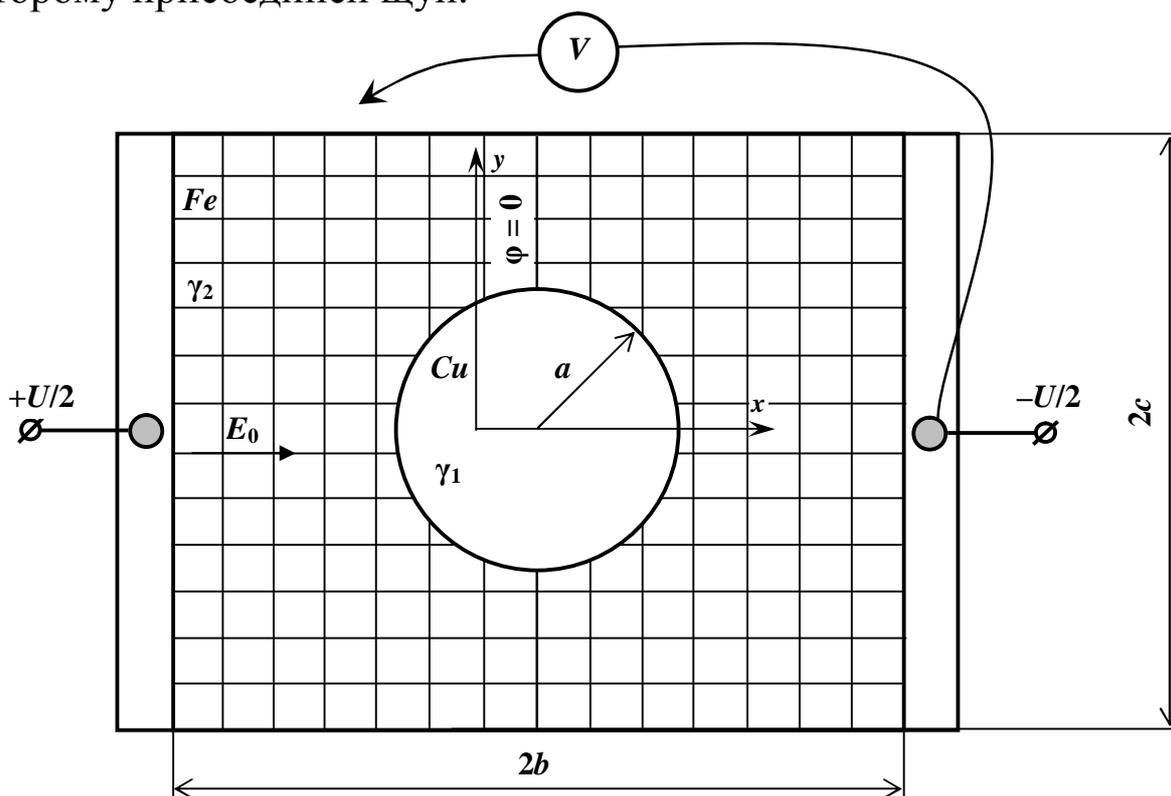


Рис 6.1. Схема макета

6.3. Краткие теоретические сведения

Отношение тангенсов углов, составляемых на границе раздела линией тока в обеих средах с нормалью к поверхности раздела, должно быть равно отношению удельных проводимостей сред. Это равенство вытекает из граничных условий для векторов плотности тока и напряженности электрического поля:

касательные составляющие вектора напряженности электрического поля на границе раздела среда равны

$$E_{1t} = E_{2t} , \quad (6.1)$$

на границе раздела сред нормальные составляющие вектора плотности тока непрерывны:

$$\delta_{n1} = \delta_{n2} \text{ или } \gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n} . \quad (6.2)$$

Из этих условий вытекает соотношение:

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} , \quad (6.3)$$

где θ_1 и θ_2 – углы между векторами $\vec{\delta}$ или \vec{E} и нормалью к границе раздела.

Между медными брусками, припаянными к краям листа, пропускают постоянный ток, который поддерживают неизменным в течение опыта.

Вследствие того, что ток вводится в железный лист через припаянные к его краям массивные медные бруски, имеющие малое электрическое сопротивление, можно приближенно считать, что эти края листа являются линиями равного потенциала. Если бы железный лист не содержал в себе впаянного медного круга и был сплошным, то поле тока в нем было бы однородным, т. е. линии тока представляли бы собою параллельные прямые. Если учесть, что поле тока в листе является плоскопараллельным, то этот случай аналогичен тому, когда длинный круговой цилиндр из материала с высокой удельной проводимостью оказывается помещенным в проводящую среду с меньшей удельной проводимостью, по которой протекает ток перпендикулярно оси цилиндра, причем при отсутствии цилиндра поле тока можно считать однородным.

Этот случай исследуется в данной лабораторной работе.

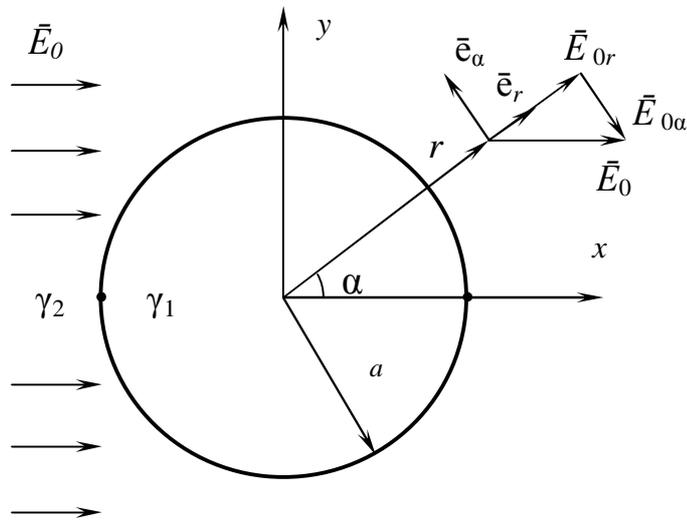


Рис. 6.2. Цилиндр в однородном внешнем поле

Распределение потенциала будет определяться решением уравнения Лапласа, которое в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{r^2 \partial \alpha^2} = 0. \quad (6.4)$$

При решении уравнения (6.4) используются следующие граничные условия.

1. Решение в особых точках:

$$\text{на оси цилиндра при } r = 0, \quad \varphi = 0; \quad (6.5)$$

$$\text{при } r = \infty, \quad \vec{E} = \vec{E}_0, \text{ или } \varphi = -E_0 r \cos \alpha. \quad (6.6)$$

2. На границе раздела двух сред уравнения (6.1) и (6.2) будут иметь вид:

$$E_{1\alpha} = E_{2\alpha} \text{ или } \varphi_1 = \varphi_2; \quad (6.7)$$

$$D_{1r} = D_{2r} \text{ или } \gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}. \quad (6.8)$$

Здесь индекс 1 соответствует внутренней области, индекс 2 – внешней. Кроме того, из условий симметрии поля относительно оси x следует:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(-\alpha). \quad (6.9)$$

Используя метод разделения переменных, легко убедиться в том, что потенциал является периодической функцией α и может быть представлен рядом Фурье, который в соответствии с формулой (6.9) содержит только четные функции.

Записывая решения уравнений Лапласа (6.4) для внутренней и внешней областей в виде рядов Фурье и учитывая граничные условия (6.5) – (6.8), можно получить:

$$\varphi_1 = -E_0 \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot r \cdot \cos\alpha, \quad (6.10)$$

$$\varphi_2 = -E_0 \cdot r \cdot \cos\alpha + E_0 \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \frac{a^2}{r} \cos\alpha. \quad (6.11)$$

Учитывая, что $r \cdot \cos\alpha = x$, получаем, что напряженность электрического поля внутри цилиндра имеет только горизонтальную составляющую и постоянно, то есть $E_1 = \text{const}$ при $r \leq a$.

$$E_1 = E_{1x} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = E_0 \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (6.12)$$

По распределению потенциала определяем напряженность поля $\bar{E} = -\text{grad}\varphi$ по двум составляющим E_{2r} и $E_{2\alpha}$ для внешней области.

$$E_{2r} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} = E_0 \left(1 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \frac{a^2}{r^2} \right) \cos\alpha, \quad (6.13)$$

$$E_{2\alpha} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha} = E_0 \left(-1 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{a^2}{r^2} \right) \sin\alpha. \quad (6.14)$$

Для плотности тока внутри круга получим выражение:

$$\delta_1 = \gamma_1 E_1 = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \gamma_1 E_0 = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \delta_0,$$

где $\delta_0 = \gamma_2 E_0$ – плотность тока во внешнем однородном поле.

В предельном случае ($\gamma_1 = \infty$) имеем:

– $E_1 = 0$ и $\delta_1 = 2\delta_0$, т. е. в сверхпроводящем круге падение напряжения равно нулю и плотность тока удваивается по сравнению с плотностью тока во внешнем однородном поле;

– при $\gamma_1 > \gamma_2$ всегда $\delta_1 > \delta_0$, так как ток стремится идти по пути с меньшим сопротивлением и линии тока при этом соотношении между γ_1 и γ_2 стягиваются к кругу;

– при $\gamma_1 < \gamma_2$ получаем $\delta_1 < \delta_0$ и линии тока в некоторой мере обтекают круг. В предельном случае $\gamma_1 = 0$ имеем $\delta_1 = 0$ и линии тока полностью обтекают круг.

Формулы (6.10), (6.11) выведены в предположении, что толщина d_1 железного листа равна толщине d_2 медного круга.

6.4. Подготовка к работе

Вычертить на листе бумаги изображение исследуемого листа лабораторной установки и нанести рассчитанные теоретические линии напряженности электрического поля и линии равного электрического потенциала.

Чтобы получить картину поля, нужно построить семейство эквипотенциальных и силовых линий.

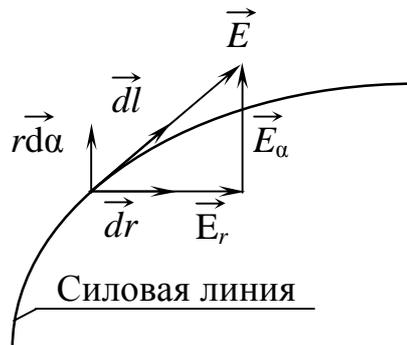


Рис. 6.3. Силовая линия

Эквипотенциали строятся по уравнениям (6.10) – (6.11) через равные приращения $\Delta\phi$. Поскольку потенциал ϕ определяется двумя координатами r и α , то построение эквипотенциали следует вести следующим образом. Задавшись потенциалом ϕ_1 , в выражение (6.10) подставляют конкретные значения координаты $r_1 < a$ и определяют вторую координату α_1 . Затем задают $r_2 > r_1$ и аналогично определяют α_2 и так далее до достижения $r = a$. При $r > a$ используют выражение (6.11) и продолжают вести эквипотенциаль во внешней области таким же образом.

Силовые линии проводятся через равные приращения потока $\Delta\Psi_E$. Уравнение силовой линии в общем случае (рис. 6.3) имеет вид:

$$[\vec{E} \vec{dl}] = 0, \quad (6.15)$$

где \vec{dl} – элемент силовой линии. Данное уравнение можно представить в виде:

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\alpha}{E_\alpha}. \quad (6.16)$$

Для внутренней области поле однородно и направлено по оси x (6.12), то есть проводить силовые линии внутри цилиндра следует через равные промежутки Δy . Уравнение силовой линии внутри круга

$$\frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot y = M = \text{const}. \quad (6.17)$$

При переходе от одной линии к другой поток вектора \vec{E} следует увеличивать на одну и ту же величину $\Delta\Psi_E$, то есть приращение числа M увеличивать на одну и ту же величину ΔM , при этом число линий внутри круга взять порядка пяти.

Для внешней области после подстановки (6.13) и (6.14) в (6.16) и интегрирования получаем параметрическое уравнение силовой линии:

$$\frac{r}{a^2 \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} + r^2} = C \sin \alpha, \quad (6.18)$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая положением точки (r, α) , через которую проводится силовая линия.

Если записать уравнение (6.18) в декартовых координатах, то есть подставить $r^2 = x^2 + y^2$, $r \cdot \sin \alpha = y$, то уравнение силовой линии будет иметь вид

$$\left(1 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) \cdot y = M = \text{const}, \quad (6.19)$$

где M – постоянная интегрирования ($M = 1/C$). Построение силовых линий начинаем с точек, лежащих на медных брусках, т.е. при $x = b$, и

выбираем $y = \frac{2c}{n} k$, где n – полное число силовых линий (число

четное, например, 10), k – номер силовой линии. В силу симметрии задачи, картину поля достаточно построить для четверти листа. Например, для первой линии $k = 1$, в уравнение (6.19) подставляем

$x = b$, $y = \frac{2c}{n} \cdot 1$, и определяем M , затем решаем это уравнение. При

решении уравнения (6.19) нужно задавать координату y и

определять x . Еще проще задавать $r < \sqrt{b^2 + \left(\frac{2c}{n} k\right)^2}$, затем из

уравнения определять y , а $x = \sqrt{r^2 - y^2}$, то есть находить координаты

силовой линии $M = \text{const}$. Величина M соответствует потоку вектора \vec{E} , заключенному между осью x и первой силовой линией на единицу длины цилиндра, поэтому следующую силовую линию нужно проводить, удваивая M , следующую – утраивая и т.д.

Уравнения линий напряженности согласно формулам (6.12), (6.13) и (6.14) имеют следующий вид:

вне круга

$$\left(1 + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \cdot \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right) y = K = \text{const}, \quad (6.20)$$

внутри круга

$$\frac{2\gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_1} y = K = \text{const}. \quad (6.21)$$

При переходе от любой линии к соседней с ней поток вектора E следует увеличивать на одну и ту же величину ΔV , т. е. число K следует увеличивать на одну и ту же величину ΔK . Приращение ΔK следует выбирать так, чтобы внутри круга уложилось несколько (порядка пяти) линий.

Уравнения линий равного электрического потенциала согласно формулам (6.10), (6.11) имеют следующий вид:

вне круга

$$\left(1 - \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) y = L = \text{const}, \quad (6.22)$$

внутри круга

$$\frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} y = L = \text{const}. \quad (6.23)$$

Чтобы при переходе от любой линии равного потенциала к соседней потенциал возрастал на одну и ту же величину ΔU , следует давать числу L одно и то же приращение ΔL . Рекомендуется приравнять $\Delta L = \Delta K$, так как при этом ширина ячеек сетки поля будет равна их длине.

Согласно уравнениям (6.10) и (6.12) внутри круга линии напряженности электрического поля и линии равного потенциала являются прямыми. Вне круга они имеют сложную форму и их следует строить по точкам, которые вычисляются по уравнениям (6.11) и (6.18).

6.5. Рабочее задание

6.5.1. Составить схему подключения установки и подключить ее к источнику питания. Источником питания служит источник, расположенный на стенде. Рекомендуемое напряжение от 10 до 30 В.

6.5.2. На построенную на основе теоретических расчетов картину поля наносят линии равного потенциала, полученные экспериментальным путем.

6.5.3. На отдельном рисунке построить линии тока. Уравнения линий тока получаются, если правые части уравнения (6.17), (6.19) линий напряженности электрического поля умножить для области вне круга на γ_1 и для области внутри круга на γ_2 .

Вне круга

$$\left(1 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_1} \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right) y \gamma_2 = N = \text{const}, \quad (6.24)$$

внутри круга

$$\frac{2\gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_1} y \gamma_1 = N = \text{const}. \quad (6.25)$$

Чтобы иметь дело только с отношениями удельных проводимостей, разделим эти уравнения на γ_2 . Получаем уравнения линий тока вне круга:

$$\left(1 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_1} \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right) y = N_1 = \text{const}, \quad (6.26)$$

внутри круга

$$\frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} y = N_1 = \text{const}. \quad (6.27)$$

Если выбрать $\Delta N = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \Delta M$, то внутри круга число линий тока

получится таким же, как и число ранее построенных линий напряженности электрического поля. Вне круга линии тока будут идти реже линий напряженности электрического поля. На построенной картине линий тока следует убедиться в правильности условия преломления линий тока на границе раздела:

$$\frac{\text{tg}\theta_1}{\text{tg}\theta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (6.28)$$

6.6. Контрольные вопросы

1. Каковы граничные условия на поверхности раздела двух проводящих сред?
2. Аналогия электрического поля в проводящей среде и электростатического поля.
3. Сопоставить результаты эксперимента и теоретического построения картины поля.
4. Какое направление имеет вектор \vec{E} на границе раздела двух сред, если одна из них является сверхпроводимой?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

Поверхностный эффект в шине, помещенной в паз электрической машины

7.1. Цель работы

Цель работы состоит в изучении явления поверхностного эффекта на примере распределения плотности переменного тока и магнитной индукции по высоте проводника, находящегося в пазу электрической машины.

7.2. Теоретические сведения

При протекании тока по проводнику силовые линии магнитного поля проходят частично по стали, частично по проводнику и изоляции, размещенным в пазу. Можно считать, что магнитная проницаемость стали много больше магнитной проницаемости проводника ($\mu_r = 1$). При этом магнитные силовые линии из стали в паз выходят под прямым углом к боковой поверхности паза. При малой ширине паза и при небольшой толщине изоляции сравнительно с толщиной проводника можно считать, что во всех точках внутри проводника, не считая его концов, вектор магнитной индукции имеет только y -составляющую (рис. 7.1). Вектор плотности тока направлен против оси x .

В работе исследуются два варианта расположения проводников в пазу (рис. 7.1 и 7.2).

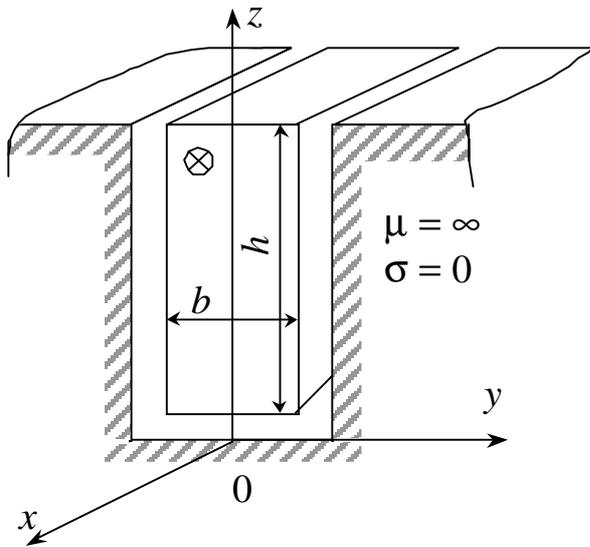


Рис 7.1. Паз с одним проводником

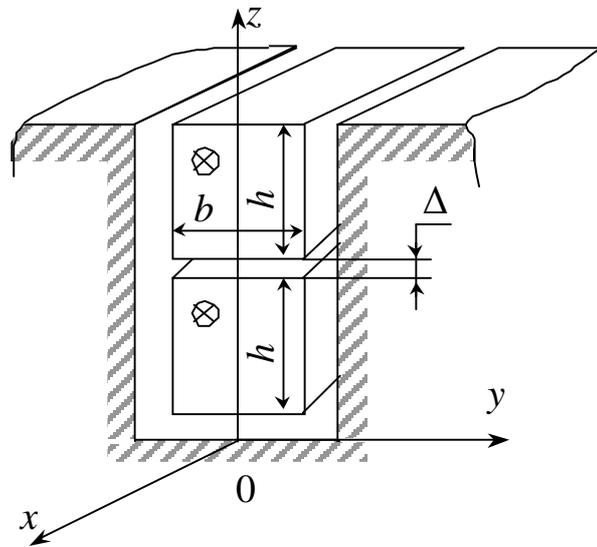


Рис 7.2. Паз с двумя проводниками

7.2.1. Паз с одним проводником

Из решения уравнения Гельмгольца [1, 2]

$$\nabla^2 \underline{H} = \underline{\gamma}^2 \underline{H} \quad (7.1)$$

находится распределение магнитного поля по глубине проводника в виде

$$\underline{H} = \underline{H}_y = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}z} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}z}. \quad (7.2)$$

Постоянные \underline{A}_1 и \underline{A}_2 определяются из следующих граничных условий:

при $z = 0$ напряженность $\underline{H}_0 = 0$;

$$\text{при } z = h \text{ напряженность } \underline{H}_1 = \frac{\underline{I}}{b}, \quad (7.3)$$

где \underline{I} – ток в шине; b – ширина шины. Зазором между шиной и пазом пренебрегаем. Решение получается в виде:

$$\underline{E} = \underline{E}_x = -\frac{\underline{\xi} \underline{I}}{2b \operatorname{sh}(\underline{\gamma}h)} (e^{\underline{\gamma}z} + e^{-\underline{\gamma}z}) = -\frac{\underline{\gamma} \underline{I}}{b \sigma \operatorname{sh}(\underline{\gamma}h)} \operatorname{ch}(\underline{\gamma}z), \quad (7.4)$$

$$\underline{H} = \underline{H}_y = \frac{\underline{I}}{2b \operatorname{sh}(\underline{\gamma}h)} (e^{\underline{\gamma}z} - e^{-\underline{\gamma}z}) = \frac{\underline{I}}{b \operatorname{sh}(\underline{\gamma}h)} \operatorname{sh}(\underline{\gamma}z), \quad (7.5)$$

где σ – удельная проводимость проводника, $\underline{\gamma}$ – коэффициент распространения волны, $\underline{\xi}$ – волновое сопротивление:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega\sigma\mu_0\mu_r}, \quad \underline{\xi} = \underline{\gamma}/\sigma. \quad (7.6)$$

Выражения (7.4) и (7.5) показывают, что в проводнике существует как падающая волна (первое слагаемое), так и отраженная (второе слагаемое), распространяющиеся соответственно против оси z и по оси z .

Если глубина паза h существенно больше глубины проникновения электромагнитной волны в проводнике, заполняющем паз, то отраженной волной можно пренебречь, и формулы (7.4) и (7.5) примут более простой вид

$$\underline{E}_x = -\frac{\underline{\xi}}{b} \underline{I}_y e^{-\underline{\gamma}(h-z)}, \quad \underline{H}_y = \frac{\underline{I}_y}{b} e^{-\underline{\gamma}(h-z)}. \quad (7.7)$$

Обозначим $\underline{H}_1 = \frac{\underline{I}_y}{b}$ – напряженность магнитного поля на поверхности шины (при $z = h$), а $\underline{E}_1 = \underline{\xi} \underline{H}_1$ – напряженность электрического поля на поверхности шины, тогда формула (7.7) запишется в следующем виде:

$$\underline{E}_x = -\underline{E}_1 e^{-\underline{\gamma}(h-z)}, \quad \underline{H}_y = \underline{H}_1 e^{-\underline{\gamma}(h-z)}. \quad (7.8)$$

Плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля $\underline{J}_x = \sigma \underline{E}_x$, а индукция – напряженности магнитного поля $\underline{B}_y = \mu_0 \mu_r \underline{H}_y$.

Распространяясь вглубь проводника, волна затухает в нем, так как по пути распространения часть электромагнитной энергии переходит в тепловую.

Неравномерность распределения тока по глубине проводника приводит к увеличению его сопротивления по сравнению с сопротивлением постоянному току.

Комплексное сопротивление проводника на переменном токе можно определить с помощью теоремы Пойнтинга в комплексной форме. Для этого подсчитаем комплексную мощность \underline{S} , равную потоку вектора Пойнтинга $\underline{\Pi}$ через верхнюю открытую поверхность проводника, затем разделим на квадрат тока, протекающего по

проводнику и получим комплексное сопротивление проводника на единицу длины.

Действительно,

$$\underline{S} = -\oint_S [\underline{E} \overline{H}^*] dS = P + jQ = I^2 R + jI^2 X, \quad (7.9)$$

отсюда
$$\underline{Z} = r + jx = -\frac{1}{I^2} \oint_S [\underline{E} \overline{H}^*] ds. \quad (7.10)$$

Поток вектора \underline{H} отличен от нуля только на открытой части паза ($b \times l$), т.е. при $z = h$. Тогда

$$\tilde{S} = -\int_S \Pi_z ds = -\int_S \underline{E}_x \overline{H}_y^* ds = -\underline{E}_x \overline{H}_y^* bl = -(\underline{E}_x l)(\overline{H}_y^* b) = -\underline{U}_{\text{пов}}^* I. \quad (7.11)$$

Последнее выражение показывает, что комплексная мощность, выделяющаяся в проводнике, определяется произведением комплекса напряжения на поверхности ($\underline{U}_{\text{пов}}^*$) на комплексно сопряженное значение тока (I).

Выражение для определения комплексного сопротивления проводника определяется следующим образом:

$$\underline{Z} = R + jX = \frac{\underline{S}}{I^2} = \frac{\underline{S}}{(H_1 b)^2} = \frac{-\underline{E}_1 l}{H_1 b} = \frac{\xi l}{b} \text{cth}(\gamma h), \quad (7.12)$$

где l – длина проводника; b – толщина проводника; R – активное сопротивление проводника в пазу; X – индуктивное сопротивление, обусловленное внутренним магнитным потоком в проводнике.

Данные формулы справедливы при условии, что толщина проводника мало отличается от ширины паза.

7.2.2. Паз с двумя проводниками

В действительности в пазах электрических машин расположен не один проводник. В этом случае соседние проводники оказывают влияние на распределение плотности тока в рассматриваемом проводнике из-за эффекта близости. Рассмотрим случай двух проводников (см. рис. 7.2).

Для нижнего проводника граничные условия остаются такими же, как и в случае одного проводника в пазу (на нижней его грани

$H_x=0$, на верхней грани при $z=h$, $H_x = I/b$), поэтому распределение магнитного поля в нем будет таким же, как и в случае с одним проводником.

Для верхнего проводника граничные условия следующие:

$$\begin{aligned} \text{при } z = h & \quad H_x = I/b, \\ z = 2h & \quad H_x = 2I/b. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Решение уравнения Гельмгольца будем искать в виде:

$$H_y = H_y = A_1 \text{sh}(\gamma(2h-z)) + A_2 \text{sh}(\gamma(z-h)), \quad (7.14)$$

тогда при $z = h$, предполагая, что зазор $\Delta \ll h$ (рис 7.2), получим

$$I/b = A_1 \text{sh}(\gamma h),$$

и при $z = 2h$

$$2I/b = A_2 \text{sh}(\gamma h).$$

Отсюда находим постоянные A_1 и A_2

$$A_1 = \frac{I}{b} \frac{1}{\text{sh}(\gamma h)} = \frac{A_2}{2}.$$

Далее получается решение для напряженности магнитного поля:

$$H_x = H_x = \frac{I}{b \text{sh}(\gamma h)} \left[\text{sh}(\gamma(2h-z)) + 2 \text{sh}(\gamma(z-h)) \right] \quad (7.15)$$

Из первого уравнения Максвелла по известной напряженности магнитного поля находим напряженность электрического поля:

$$E_x = E_x = -\frac{1}{\sigma} \frac{dH_y}{dz} = \frac{I\gamma}{\sigma b \text{sh}(\gamma h)} \left[\text{ch}(\gamma(2h-z)) - 2 \text{ch}(\gamma(z-h)) \right]. \quad (7.16)$$

Полученные выражения используются при расчетах.

7.3. Описание установки

Исследование проводится на специально изготовленной модели паза электрической машины. Модель паза укреплена на столе, а установка, соответствующая схеме, изображенной на рис. 7.3, полностью собрана, поскольку в работе используются токи до 90 А. Для ее работы необходимо лишь подключить питание от источников

частотой 50 Гц и 400 Гц поочередно. Установка состоит из моделирующей и измерительной частей.

Моделирующая часть включает в себя следующее:

1. Источники переменного напряжения с частотой 50 Гц и 400 Гц.

2. Регулировочный автотрансформатор «Рег.тока», который закреплен под столом. Изменение тока осуществляется поворотом нижней ручки.

3. Питающий трансформатор Тр.1 (закрыт чехлом).

4. Измерительный трансформатор тока Тр.2 типа УТТ-6М1.

5. Гибкие токопроводы с зажимами на концах (подключаются к клеммам $K1$ и $K2$).

6. Набор шин с встроенными внутри измерительными рамками для определения напряженности магнитного поля и отпайками для измерения напряженности электрического поля. На шине установлен разъем Ш для снятия сигнала.

7. Модель паза, набранная из листов трансформаторной стали, внутрь которой можно вставлять шины. Ширина паза $b = 1$ см, глубина $h = 10$ см, длина $l = 35$ см.

Измерительная часть включает в себя:

1) два амперметра с пределами измерения 5 А и 0,5 А для определения тока в шине; амперметры включены во вторичную обмотку измерительного трансформатора тока Тр.2. Переключение между амперметрами производится переключателем « $\leftarrow \circ \rightarrow$ ». Показание амперметра 1 А соответствует 30 А в шине;

2) осциллограф двухлучевой типа OS-9020А;

3) милливольтметр ВЗ-33.

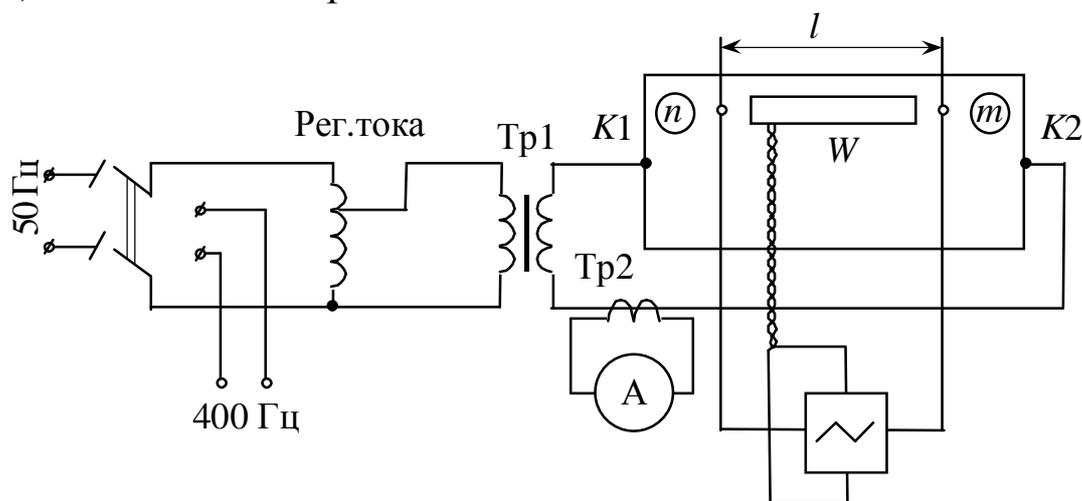


Рис 7.3. Схема установки

Для измерения модуля напряженности электрического поля E в шине на глубине 5 мм от верхнего края установлена пара отпаек на расстоянии $l=150$ мм друг от друга. Затем по всей глубине шины на расстоянии 10 мм одна от другой расположены еще 9 пар отпаек. С помощью разъема и переключателя эти напряжения подводятся к клеммам с обозначением « E ».

Ток протекает по шине от клеммы $K1$ к $K2$ и в средней части шины имеет практически одно направление – по оси X (или против). По закону Ома $\delta = \sigma E$, т.е. $\vec{E} = \bar{i} E_x$. Если измерить напряжение между двумя отпайками n и m (рис. 7.3), то

$$i\delta = \int_n^m E_x dl \approx E_x \cdot l, \quad (7.17)$$

где l – расстояние между отпайками.

Таким образом, для определения модуля напряженности E с помощью милливольтметра необходимо измерить напряжения по глубине шины и, разделив их на l , получить напряженности электрического поля в зависимости от координаты z . Следует отметить, что в верхнем положении значение E будет максимальным.

Для измерения модуля напряженности магнитного поля H около шины закреплены 10 продолговатых измерительных рамок симметрично линиям, соединяющим отпайки для измерения E , так что H будет измеряться в тех же точках, что и E , и концы измерительных катушек через разъем и переключатель подключены к клеммам « H ». Чтобы не охватывать постороннего потока, проводники, идущие от рамок и от отпаек, перевиваются. Число витков в измерительных рамках $W = 20$, сечение $S = 6,5 \text{ см}^2$.

Как было разъяснено в теоретической части, напряженность магнитного поля $\vec{H} = \bar{j} H_y$, имеет только y -ю составляющую и направлена перпендикулярно направлению тока. Поэтому если в плоскости шины расположить измерительную рамку, то в ней будет наводиться ЭДС самоиндукции

$$e = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (7.18)$$

где $\Psi = W \cdot \Phi$, W – число витков рамки, поток $\Phi = \bar{B} \cdot \bar{S}$, причем $\bar{S} \parallel \bar{B}$, S – площадь сечения рамки, \bar{B} – индукция магнитного поля, которая в воздухе определяется как $\bar{B} = \mu_0 \bar{H}$.

В комплексной форме уравнение (7.18) выглядит так:

$$\mathcal{E} = -j\omega \mathcal{F} = -j\omega W\mu_0 I \mathcal{S}. \quad (7.19)$$

Итак, напряженность магнитного поля определяется следующим образом:

$$I \mathcal{F} = \frac{j\mathcal{E}}{\omega W\mu_0 S}, \quad (7.20)$$

где $\omega = 2\pi f$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Таким образом, для определения модуля напряженности H с помощью милливольтметра необходимо измерить модуль ЭДС самоиндукции \mathcal{E} и по формуле (7.20) определить модуль H .

Для измерения фаз напряженностей \mathcal{E} и \mathcal{H} используется двухлучевой осциллограф. При измерении фазы для вектора \mathcal{H} необходимо учесть, что вектор ЭДС самоиндукции \mathcal{E} (который и приходится измерять) отстает от вектора \mathcal{H} (или \mathcal{B}) на угол $\pi/2$.

7.4. Подготовка к работе

7.4.1. Подсчитать глубины проникновения электромагнитной волны для алюминиевой и медной пластин на частотах 50 Гц и 400 Гц. Проводимости алюминия и меди $\sigma_a = 1,46 \cdot 10^5$ См/см, $\sigma_m = 5,7 \cdot 10^5$ См/см.

7.4.2. Рассчитать и построить на миллиметровой бумаге модуль и фазографы $E(z)$, $H(z)$ в точках, указанных на рис. 7.4, 7.5 при $h = 10$ см и $b = 1$ см для частоты 50 Гц и токов $I_1 = 60$ А и $I_2 = 90$ А, для частоты 400 Гц и токов $I_3 = 6$ А и $I_4 = 15$ А. Расчеты проводить по формулам (7.4, 7.5) и (7.15, 7.16). В связи с тем, что точка №1 для всех шин расположена на расстоянии 5 мм от верхней поверхности (рис. 7.4, 7.5), рекомендуется применить линейную интерполяцию для определения \dot{H} и \dot{E} на поверхности шины.

7.4.3. Подсчитать активное и реактивное сопротивления плоской пластины в пазу длиной $l = 35$ см для двух частот 50 Гц и 400 Гц (формула (7.12)) и на постоянном токе.

Пп.7.4.2. может быть выполнен на компьютерах дисплейного класса кафедры ТОЭ с помощью программы «PAZ».

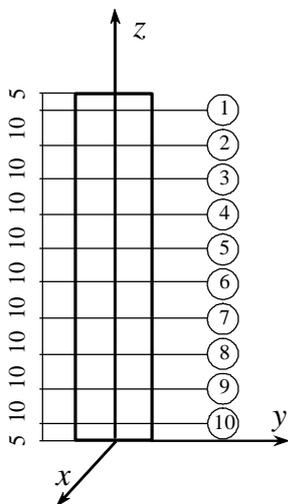


Рис 7.4.

Расположение отпаяк и измерительных обмоток в шине с одним проводником

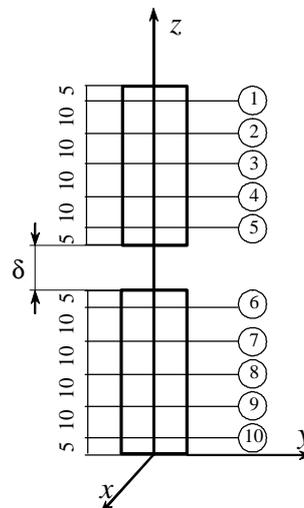


Рис 7.5.

Расположение отпаяк и измерительных обмоток в шине с двумя проводниками

7.5. Рабочее задание

7.5.1. Включить рабочую схему (рис. 7.3) на напряжение с частотой 50 Гц.

7.5.2. Установить с помощью амперметра ток в шине $I_1 = 60$ А.

7.5.3. Снять распределение $H(z)$ для десяти точек. Для этого подключить вольтметр к клеммам «Н» и измерить модули $|H|$, ставя поочередно переключатель в положение 1÷10. Модули $|H|$ пересчитать по формуле 7.20.

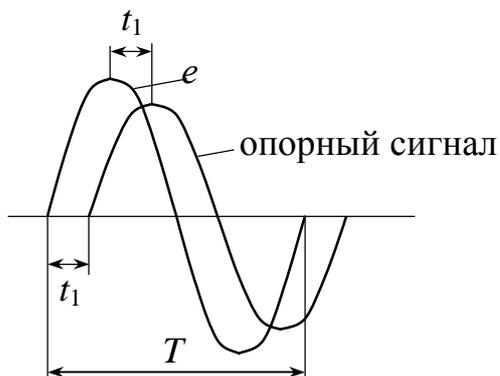


Рис. 7.6. Измерение сдвига фаз

7.5.4. Для измерения фазы ϕ на один вход осциллографа подается опорный сигнал с шины (с клемм $K1$ и $K2$). На второй вход осциллографа подается сигнал с клеммы «Н». Переключатель ставится поочередно в положение 1 ÷ 10, и для каждого положения по осциллографу определяется сдвиг по фазе сигнала ϕ относительно опорного сигнала.

Опорный сигнал на осциллографе – это неизменяющаяся по амплитуде и фазе синусоида, сигнал \mathcal{E} различен по амплитуде и фазе при каждом положении переключателя, разность фаз сигналов – это расстояние между их максимальными значениям (или нулевыми) t_1 , переведенное в градусы, т.е. $\varphi_\varepsilon = \pm \frac{t_1}{T} \cdot 360$, где T – период (рис.7.6).

При этом фаза сигнала \mathcal{H} будет равна $\psi_H = \pm\varphi_\varepsilon + \pi/2$. Если \mathcal{E} опережает опорный сигнал, то φ_ε берется со знаком «+», как показано на рис.7.6, если отстает – то со знаком «-».

7.5.5. По данным пп.7.5.3. и 7.5.4 построить график зависимости $H(z)$ и годограф $\mathcal{H}(z)$.

7.5.6. С помощью вольтметра измерить напряженность электрического поля. Для этого вольтметр подключить к клеммам «E», а переключатель – поочередно в положения 1 ÷ 10. По формуле (7.17) пересчитать модуль \mathcal{E} .

7.5.7. Для измерения фазы \mathcal{E} на один вход осциллографа подать сигнал с клемм «H», а на другой – с клемм «E» и измерить сдвиг по фазе α между сигналами \mathcal{E} и \mathcal{H} при каждом положении переключателя. С учетом знака угла α «+» или «-», фаза \mathcal{E} будет равна $\psi_E = \varphi_\varepsilon \pm \alpha$.

7.5.8. По данным пп.7.5.6 и 7.5.7 построить график зависимости $E(z)$ и годограф $\mathcal{E}(z)$.

7.5.9. Установить с помощью амперметра ток в шине $I_1 = 90$ А. Провести измерения по пп.7.5.3–7.5.8.

7.5.10. Повторить пп. 7.5.3–7.5.8, подключив установку к источнику питания с частотой 400 Гц, для токов $I_3 = 6$ А и $I_4 = 15$ А.

7.5.11. Сопоставить теоретически рассчитанные в п.7.4.2. графики и годографы $\mathcal{H}(z)$ и $\mathcal{E}(z)$ с экспериментальными, снятыми в пп.7.5.3÷7.5.10.

7.5.12. По измерениям пп. 7.5.3–7.5.8 рабочего задания найти сопротивления r и x шины длиной $l=35$ см и сравнить их с найденными теоретическими значениями, а также с сопротивлением шины постоянному току.

7.5.13. По графику $\mathcal{E}(z)$ п.7.5.8 рабочего задания определить ток в проводнике.

7.5.14. Сравнить значения токов, найденных:

- а) по показанию амперметра,
- б) по графику $E(z)$,
- в) по значению $H(z)$ над пластиной.

7.5.15. Снять и построить годографы $H(z)$ и $E(z)$ для двойной шины на частотах 50 Гц и 400 Гц. Место расположения измерительных точек приведено на рис. 7.5.

7.6. Контрольные вопросы

7.6.1. Вывести закон распределения напряженности магнитного поля по высоте проводника, находящегося в пазу электрической машины.

7.6.2. Какие основные допущения были приняты при определении \bar{H} ?

7.6.3. Вывести закон распределения плотности тока по высоте проводника.

7.6.4. Как измеряется напряженность электрического поля?

7.6.5. Какие измерения и расчеты нужно провести для определения распределения напряженности магнитного поля?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8

Электромагнитные волны в двухпроводной линии

8.1. Цель работы

В работе исследуется распределение электрической и магнитной составляющих электромагнитной волны, распространяющейся в двухпроводной линии в режимах полного отражения и в режиме бегущей волны. Полученные графики распределения действующих значений напряженностей электрической и магнитной составляющих сравниваются с теоретической картиной распределения. По полученным графикам определяется длина волны и частота колебаний генератора.

8.2. Краткие теоретические сведения

Группа направляющих поверхностей, расположенных определенным образом так, чтобы заставить электромагнитную волну в диэлектрике распространяться в заданном направлении, называется *волноводом*.

Согласно этому определению, к волноводам могут быть отнесены такие широко распространенные линии передачи электроэнергии, как двухпроводная линия и коаксиальный кабель; а процесс распространения электромагнитной волны в этих линиях можно рассматривать как частный случай распространения волн в диэлектрике.

Из теории переменного электромагнитного поля известно, что для идеального изотропного диэлектрика исходная система двух первых уравнений Максвелла может быть записана в виде [2]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}. \end{cases} \quad (8.1)$$

$$\quad (8.2)$$

Уравнения (8.1) и (8.2) могут быть приведены к системе уравнений:

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2}; \\ \nabla^2 \bar{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\quad (8.4)$$

представляющих собой волновые уравнения, в которых $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}$

– фазовая скорость электромагнитной волны.

Предполагая, что волна – плоская и распространяется вдоль оси z и вектор \bar{E} имеет только одну составляющую E_x , можно свести векторные уравнения (8.1) и (8.2) к скалярным уравнениям:

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad (8.6)$$

из которых следует, что в плоской электромагнитной волне вектора \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, нормальной к оси распространения волны z .

Для упрощения дальнейших рассуждений будем предполагать, что волна – гармоническая, т.е. вектора \vec{E} и \vec{H} меняются во времени по закону:

$$E_x = E_m \sin(\omega t + \psi_E),$$

$$H_y = H_m \sin(\omega t + \psi_H).$$

Переходя к комплексной форме записи гармонических функций, можем записать:

$$\vec{H} = H_y \quad (8.7)$$

$$\vec{E} = E_x. \quad (8.8)$$

Здесь $\vec{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_E}$ и $\vec{H} = \frac{H_m}{\sqrt{2}} = \frac{H_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_H}$ – комплексные

действующие значения напряженностей электрической и магнитной составляющей, зависящие только от z . В комплексной форме уравнения (8.5) и (8.6) будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = -j\omega\epsilon\epsilon_0 \vec{E} \end{cases} \quad (8.9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -j\omega\mu\mu_0 \vec{H} \end{cases} \quad (8.10)$$

Дифференцируя уравнение (8.9) по z и подставляя в уравнение (8.10), получим

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{\omega^2}{v^2} \vec{E} = 0. \quad (8.11)$$

Уравнение (8.11) – однородное линейное уравнение второго порядка. Корни характеристического уравнения

$$\beta_{1,2} = \pm j \frac{\omega}{v}.$$

Решение уравнения (8.11) можно записать в виде

$$\vec{E} = E_1 e^{-j \frac{\omega}{v} z} + E_2 e^{j \frac{\omega}{v} z}. \quad (8.12)$$

Комплексное действующее значение напряженности магнитного поля H может быть найдено из уравнения (8.10)

$$\dot{H} = -\frac{1}{j\omega/\mu\mu_0} \frac{\partial \dot{E}}{\partial z} = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \dot{E}_1 e^{-j\frac{\omega}{v}z} - \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \dot{E}_2 e^{j\frac{\omega}{v}z}. \quad (8.13)$$

Переходя к мгновенным значениям, получим:

$$E = \sqrt{2} E_1 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z + \psi_1\right) + \sqrt{2} E_2 \sin\left(\omega t + \frac{\omega}{v} z + \psi_2\right) \quad (8.14)$$

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \sqrt{2} E_1 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z + \psi_1\right) - \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \sqrt{2} E_2 \sin\left(\omega t + \frac{\omega}{v} z + \psi_2\right) \quad (8.15)$$

Первые слагаемые в уравнениях (8.14) и (8.15) описывают прямую волну, т.е. волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z , а вторые слагаемые – обратную волну, т.е. волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси z .

Обратная волна образуется в результате отражения прямой волны от каких-либо неоднородностей в диэлектрике. Если диэлектрик однородный и безграничный, то обратная волна отсутствует. В этом случае:

$$E = E_1 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z + \psi_1\right) \quad (8.16)$$

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E_1 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z + \psi_1\right) \quad (8.17)$$

и волна называется *бегущей*. В бегущей волне E и H взаимно перпендикулярны и фазы их колебаний в любой момент совпадают.

Отношение $\frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \underline{Z}_c$ в бегущей волне называется *волновым сопротивлением*.

Для диэлектрической среды $\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}$, как это

следует из уравнений (8.16) и (8.17).

На основании всего вышесказанного, плоскую электромагнитную волну можно представить, как показано на рис.8.1. Сплошные стрелки изображают линии вектора \dot{E} , пунктирные стрелки – вектора \dot{H} . Изображенная картина распределения

электрической и магнитной составляющей «бежит» вдоль оси z со

$$\text{скоростью } v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}.$$

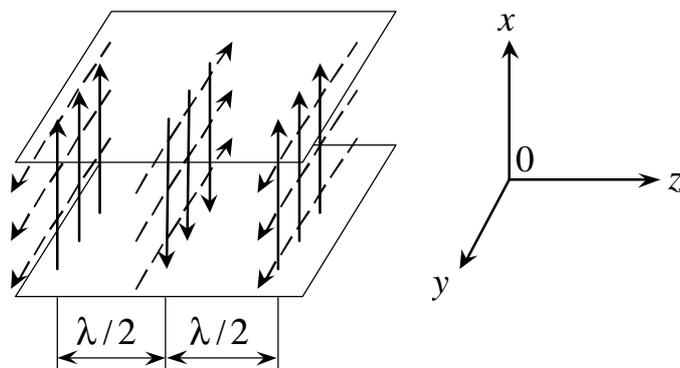


Рис. 8.1. Бегущая электромагнитная волна

Из рис. 8.1 следуют два граничных условия: при выбранном положении системы координат силовые линии вектора \vec{E} нормальны к поверхностям, параллельным плоскости $Y0Z$, а силовые линии вектора \vec{H} параллельны этим поверхностям.

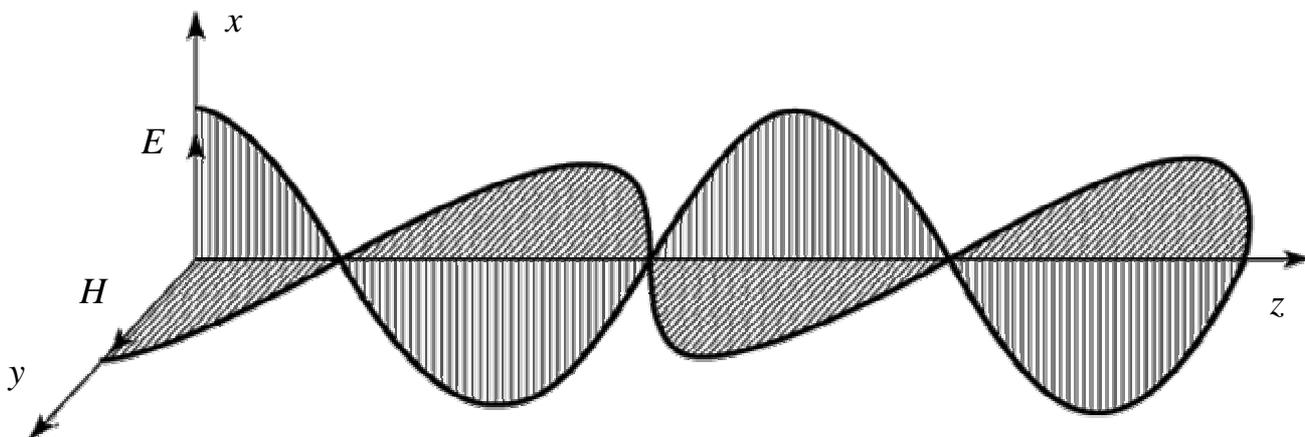


Рис. 8.2. Электромагнитная волна

Рассмотрим основные режимы работы двухпроводной линии [3]. При этом удобно вести отсчет расстояний не от начала линии, а от ее конца. Из рис. 8.3 видно, что для такого перехода достаточно заменить в уравнениях (8.12) и (8.13) координату z на $(l - z_1)$:

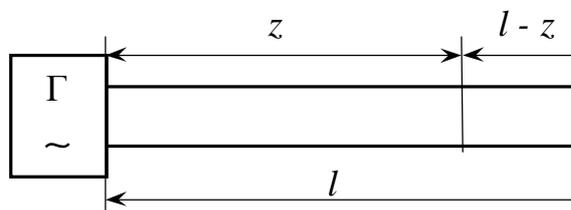


Рис. 8.3
Двухпроводная линия

$$\underline{E} = \underline{E}_1 e^{-j\frac{\omega}{v}(l-z_1)} + \underline{E}_2 e^{j\frac{\omega}{v}(l-z_1)} = \underline{E}_3 e^{j\frac{\omega}{v}z_1} + \underline{E}_4 e^{-j\frac{\omega}{v}z_1}, \quad (8.18)$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{E}_3}{\underline{Z}_c} e^{j\frac{\omega}{v}z_1} - \frac{\underline{E}_4}{\underline{Z}_c} e^{-j\frac{\omega}{v}z_1}. \quad (8.19)$$

Здесь
$$\underline{E}_3 = \underline{E}_1 e^{-j\frac{\omega l}{v}}, \quad \underline{E}_4 = \underline{E}_2 e^{j\frac{\omega l}{v}}. \quad (8.20)$$

Режим короткого замыкания.
 Этот режим получается, если линия замкнута на конце хорошо проводящей перемычкой. На рис. 8.4 видно, что в этом случае вектор \underline{E} на конце линии параллелен проводящей поверхности, чего быть не может. Следовательно, при $z = l$ или $z_1 = 0$ $E = 0$.

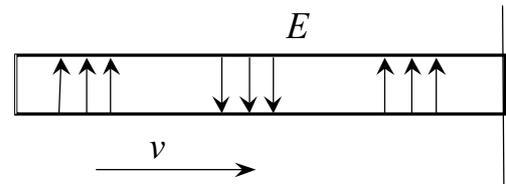


Рис. 8.4.
 Режим короткого замыкания

Из уравнения (8.18) имеем

$$\underline{E}_3 + \underline{E}_4 = 0. \quad (8.21)$$

Физически это означает, что на конце линии имеет место полное отражение прямой волны (\underline{E}_3) с образованием обратной волны (\underline{E}_4), причем на конце линии фазы волн отличаются на π , т.е. $\underline{E}_3 = -\underline{E}_4$. Сложение прямой и обратной волн приводит к образованию стоячей волны. Действительно, подставляя в (8.18) и (8.19) соотношение (8.21) и обозначая $\underline{E}_3 = \underline{E}_0$ получим:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{j\frac{\omega}{v}z_1} - \underline{E}_0 e^{-j\frac{\omega}{v}z_1} = 2j\underline{E}_0 \sin \frac{\omega}{v} z_1, \quad (8.22)$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_c} e^{j\frac{\omega}{v}z_1} + \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_c} e^{-j\frac{\omega}{v}z_1} = 2 \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_c} \cos \frac{\omega}{v} z_1. \quad (8.23)$$

Уравнения (8.22) и (8.23) запишем для мгновенных значений:

$$E = 2 E_{0m} \sin \frac{\omega}{v} z_1 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}), \quad (8.24)$$

$$H = \frac{2E_{0m}}{Z_c} \cos \frac{\omega}{v} z_1 \sin \omega t . \quad (8.25)$$

Первое уравнение есть уравнение стоячей волны напряженности электрического поля, второе – уравнение стоячей волны напряженности магнитного поля. Обе волны пространственно сдвинуты на $\pi/2$, рис. 8.5. Во времени колебания вектора \bar{E} опережают колебания вектора \bar{H} также на угол $\pi/2$. Физически это означает, что в стоячей волне отсутствует перенос энергии в пространстве, а имеет место лишь взаимное превращение энергии электрического поля в энергию магнитного поля и наоборот.

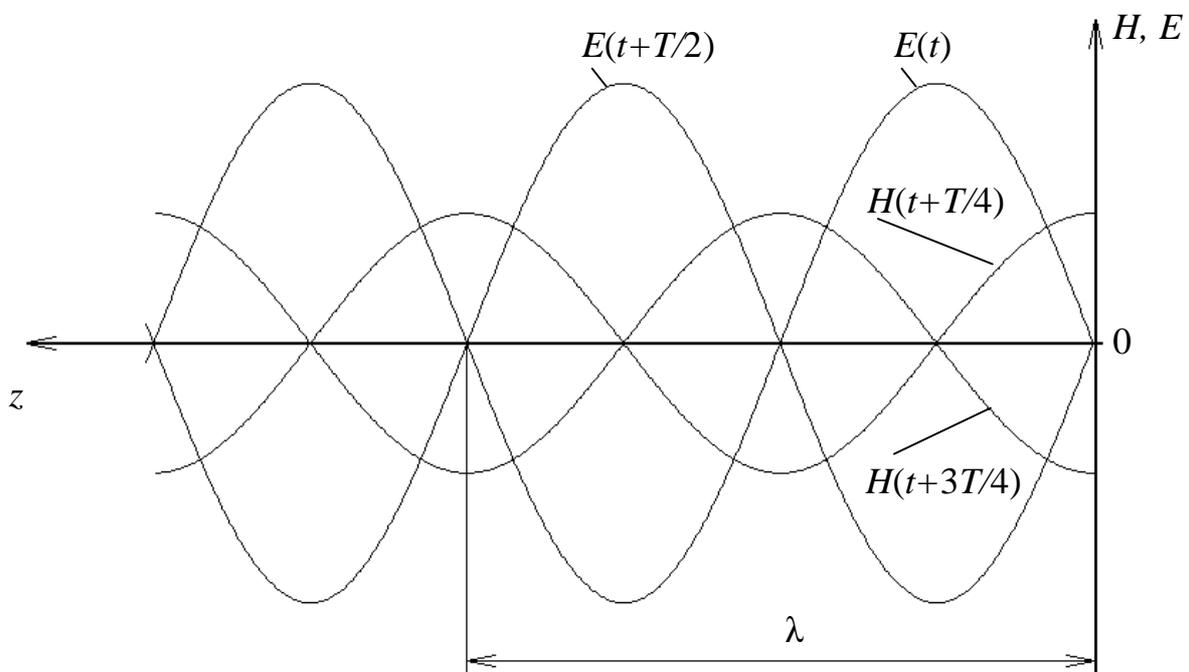


Рис. 8.5. Стоячие волны при коротком замыкании

На рис. 8.5. изображены стоячие волны для векторов \bar{E} и \bar{H} . В точках $z_1=0$ и в точках, отстоящих от конца линии на расстояниях $z_1 = k \frac{\lambda}{2}$, где k – целое число, в любой момент времени будут нули напряженности электрического поля, называемые узлами, и максимумы напряженности магнитного поля, называемые

пучностями. На расстояниях от конца линии $z_1 = (2k + 1)\frac{\lambda}{4}$ наблюдаются пучности вектора \overline{E} и узлы вектора \overline{H} .

Режим холостого хода. В теории длинных линий режим холостого хода получается при разомкнутой на конце линии ($R_H = \infty$). Идеализируя этот случай и полагая, что ток на конце линии равен нулю, положим в уравнении (8.19) $\overline{H} = 0$ при $z_1 = 0$. Тогда

$$\underline{E}_3 - \underline{E}_4 = 0 \quad \text{и} \quad \underline{E}_3 = \underline{E}_4 = \underline{E}_0. \quad (8.26)$$

Подстановка (8.26) в уравнения (8.18) и (8.19) дает :

$$\underline{E} = 2 \underline{E}_0 \cos \frac{\omega z_1}{v}, \quad (8.27)$$

$$\underline{H} = 2 j \frac{\underline{E}_0}{Z_c} \sin \frac{\omega z_1}{v}. \quad (8.28)$$

Сравнивая уравнения (8.22) и (8.23) с уравнениями (8.27) и (8.28) видим, что и в этом случае образуются стоячие волны, но стоячая волна вектора \overline{E} «поменялась местом» со стоячей волной вектора \overline{H} (по сравнению с предыдущим случаем короткого замыкания).

Уравнения (8.27) и (8.28) запишем для мгновенных значений в виде:

$$E = 2 E_{0m} \cos \frac{\omega}{v} z_1 \sin \omega t, \quad (8.29)$$

$$H = \frac{2 E_{0m}}{Z_c} \sin \frac{\omega}{v} z_1 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}). \quad (8.30)$$

На рис. 8.6. показаны напряженности электрического и магнитного полей при холостом ходе. В точках $z_1=0$ и в точках, отстоящих от конца линии на расстояниях $z_1 = k\frac{\lambda}{2}$, где k – целое число, имеем в любой момент времени пучности напряженности электрического поля и узлы напряженности магнитного поля. На расстояниях от конца линии $z_1 = (2k + 1)\frac{\lambda}{4}$ наблюдаются узлы \overline{E} и пучности \overline{H} .

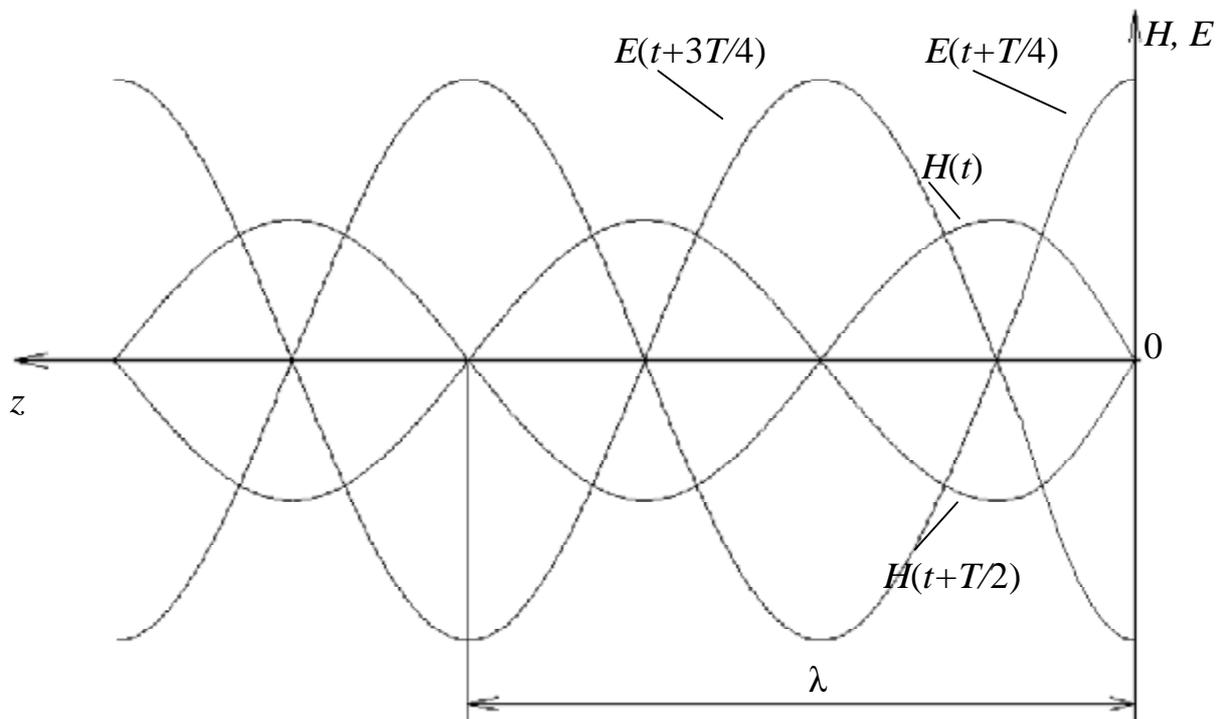


Рис. 8.6. Стоячие волны при холостом ходе

Режим бегущей волны. Пусть линия замкнута на конце сопротивлением, величина которого равна волновому сопротивлению линии.

При этом для векторов \bar{E} и \bar{H} на конце линии будет выполняться условие

$$\frac{\bar{E}}{\bar{H}} = \underline{Z}_c \quad (\text{при } z_1 = 0).$$

Из уравнений (8.18) и (8.19) имеем

$$\frac{\bar{E}}{\bar{H}} = \frac{\bar{E}_3 + \bar{E}_4}{\bar{E}_3 - \bar{E}_4} \underline{Z}_c, \quad (8.31)$$

или $\bar{E}_3 + \bar{E}_4 = \bar{E}_3 - \bar{E}_4$, откуда $\bar{E}_4 = 0$.

Тогда в линии:

$$\bar{E} = \bar{E}_3 e^{j\frac{\omega}{v}z_1}, \quad (8.32)$$

$$\bar{H} = \frac{\bar{E}_3}{\underline{Z}_c} e^{j\frac{\omega}{v}z_1}. \quad (8.33)$$

Т.е. мы имеем дело с бегущими волнами. Отражение полностью отсутствует, вся энергия бегущей волны поглощается сопротивлением $R_H = Z_c$ на конце линии. Амплитуда колебаний векторов \vec{E} и \vec{H} вдоль линии остается постоянной.

8.3. Описание установки

Установка представляет собой двухпроводную линию, концы которой закреплены на изолирующих платах, закрепленных на стенах лаборатории (рис. 8.7).

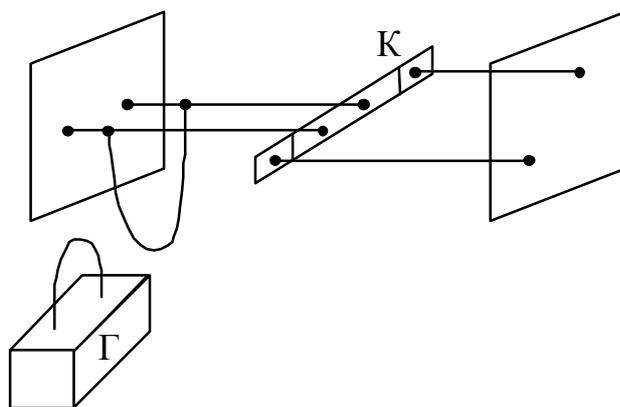


Рис. 8.7. Схема установки

К началу линии подключена петля связи с генератором УКВ колебаний Γ . На конце линии имеется колодка K , прикрепленная к стене на растяжках. Эти растяжки образуют двухпроводную линию, входное сопротивление которой велико, что позволяет осуществить в основной линии режим, близкий к режиму холостого хода.

Для измерения действующего значения электрической и магнитной составляющих используются приборы, показанные на рис. 8.8. На рис. 8.8,а показан прибор, измеряющий магнитную составляющую. Для этого он имеет петлю, расположенную в плоскости проводов линии. Переменное магнитное поле вызывает в контуре переменный ток, выпрямляемый включенным в цепь диодом D . На рис. 8.8,б показан прибор, измеряющий электрическую составляющую. Для этого используется петля, участки которой располагаются вблизи проводов линии вдоль силовых линий вектора \vec{E} . Измерительная часть данного прибора не отличается от предыдущего.

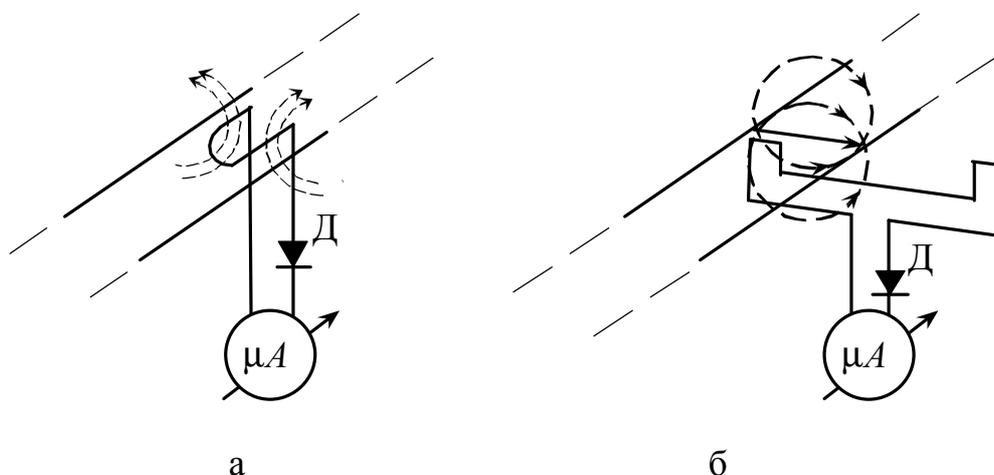


Рис. 8.8. Измерение электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля

Измерительные приборы собраны на изолирующих каркасах, позволяющих подвешивать их к линии и перемещать практически по всей ее длине.

8.4. Подготовка к работе

8.4.1. Проработать раздел курса теории электромагнитного поля «Плоские электромагнитные волны в диэлектрической среде».

8.4.2. Повторить раздел «Цепи с распределенными параметрами без потерь».

8.4.3. Разобрать особенности режимов короткого замыкания, холостого хода и согласованной нагрузки в соответствии с уравнениями (8.18) – (8.33).

8.5. Рабочее задание

8.5.1. Ознакомиться с установкой и измерительными приборами.

8.5.2. Нанести на один из проводов линии меловые метки через каждые 10 см, начиная от конца линии по всей ее длине.

8.5.3. Заготовить таблицу результатов измерений по форме табл. 8.1.

8.5.4. Включить генератор и прогреть не менее 3 ÷ 5 мин.

8.5.5. Установить на конце линии короткозамкнутую перемычку и, перемещая ее вдоль линии, настроить линию в резонанс, что определяется по наибольшим показаниям какого-либо измерительного прибора, помещенного в пучность стоячей волны.

Следует при этом учесть, что при перемещении переключки пучность также будет смещаться.

Таблица 8.1

Результаты измерения

z, см	Режим короткого замыкания		Режим холостого хода		Режим бегущей волны	
	<i>E</i>	<i>H</i>	<i>E</i>	<i>H</i>	<i>E</i>	<i>H</i>
10						
20						
30						
...						

8.5.6. Установив на линию прибор «*E*», снять показания прибора через каждые 10 см.

8.5.7. Снять короткозамкнутую переключку и повторить измерения для режима холостого хода.

8.5.8. Установить на конце линии колодку с переменным резистором. Настроить один из приборов на ближний к концу линии максимум. Регулируя величину сопротивления резистора, добиться наименьшей разности показаний прибора в пучности и узле стоячей волны. После подбора величины сопротивления повторить измерения *E* и *H* на длине не менее 3 м через каждые 10 см.

8.5.9. По окончании работы показать результаты преподавателю и выключить установку.

8.6. Обработка результатов измерений

8.6.1. На миллиметровой бумаге построить графики зависимости *E* и *H* от *Z* для каждого из трех режимов работы линии. Величина *E* и *H* – в делениях прибора (микроамперметра), расстояние *Z* – в метрах. Начало координат следует отсчитывать от конца линии. Графиков должно быть 3 – для каждого режима, по 2 кривые (*E* и *H*) на каждом графике.

8.6.2. Из графиков режима короткого замыкания определить длину волны в линии.

8.6.3. Рассчитать волновое сопротивление и скорость распространения волны линии по приведенным ниже формулам.

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}.$$

8.6.4. Построить графики теоретического распределения действующих значений E и H во всех трех режимах, используя уравнения (8.22), (8.23), (8.27), (8.28), (8.32) и (8.33).

8.6.5. Объяснить полученные результаты, обратив особое внимание на сравнение теоретических и опытных графиков. Чем объясняются полученные расхождения тех и других?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9

Исследование электромагнитного поля переменного электрического диполя

9.1. Цель работы

В работе исследуется поле переменного электрического диполя. Изучается изменение действующего значения вектора \vec{E} от расстояния и направления излучения. Наблюдается отражение электромагнитной волны от металлического экрана и возникновение стоячих волн в результате интерференции прямой и обратной волны. Измеряется длина волны и определяется частота электромагнитных колебаний генератора.

9.2. Основные теоретические положения

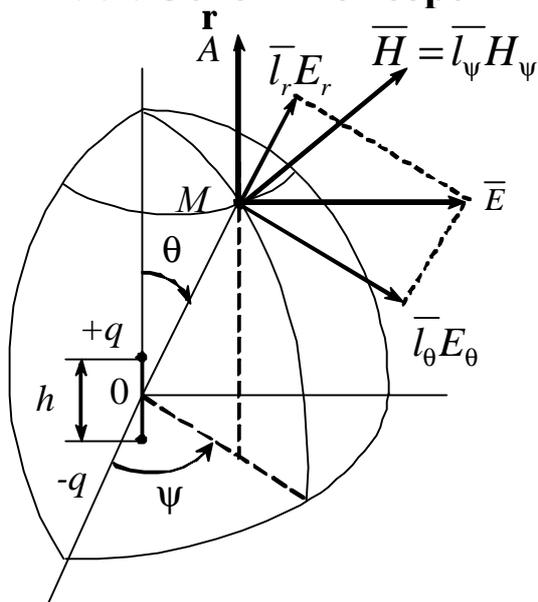


Рис. 9.1. Диполь

На рис. 9.1. изображен переменный электрический диполь, который эквивалентен отрезку проводника длиной h с протекающим по нему переменным током i .

Теория [4] позволяет рассчитать поле переменного диполя в произвольной точке $M(r, \theta, \varphi)$, используя общие выражения для векторного и скалярного электродинамических потенциалов:

$$\vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \frac{\dot{\delta}dV}{r}, \quad (9.1)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r}. \quad (9.2)$$

Предполагая, что ток и заряд меняются во времени по гармоническому закону, можно найти векторы напряженности электрической (\vec{E}) и магнитной составляющих (\vec{H}) в произвольной точке $M(r, \theta, \varphi)$ в произвольный момент времени t [4]:

$$\vec{H} = H_\psi \vec{l}_\psi = \frac{I_m h \sin \theta}{4\pi} \left\{ \frac{\omega}{vr} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) + \frac{1}{r^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \right\} \vec{l}_\psi, \quad (9.3)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} = E_r \vec{l}_r + E_\theta \vec{l}_\theta = \frac{I_m h}{4\pi\epsilon\epsilon_0} & \left\{ 2 \cos \theta \left[\frac{1}{vr^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) - \frac{1}{\omega r^3} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \right] \cdot \vec{l}_r + \right. \\ & \left. + \sin \theta \left[\frac{1}{v^2 r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) + \frac{1}{vr^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) - \frac{1}{\omega r^3} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \right] \cdot \vec{l}_\theta \right\}. \quad (9.4) \end{aligned}$$

Мощность, излучаемая диполем через единичную площадь, характеризуется вектором Умова – Пойнтинга

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (9.5)$$

Громоздкость формул (9.3) и (9.4) затрудняет анализ характера электромагнитного поля диполя и его излучения. Поэтому удобно рассмотреть две области, или «зоны» электромагнитного диполя: «ближнюю зону» и «дальнюю зону». Ближняя зона – это область, для которой выполняется условие $r \ll \lambda$, где λ – длина излучаемой волны. Дальняя зона – область, для которой $r \gg \lambda$.

Для удобства анализа полей в ближней и дальней зонах сравним между собой множители при функциях синуса и косинуса, т.е. амплитуды всех гармонических слагаемых.

Таких коэффициентов три: 1 , $\frac{v}{\omega r}$ и $\frac{v^2}{\omega^2 r^2}$. Так как $v = \lambda f$, а $\omega = 2\pi f$, то $\frac{v}{\omega r} = \frac{\lambda f}{2\pi f \cdot r} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot r}$ и, таким образом, амплитуда каждого последующего слагаемого отличается от амплитуды предыдущего множителем $\frac{\lambda}{2\pi \cdot r}$.

Ближняя зона. В ближней зоне $r \ll \lambda$, и в выражениях (9.3) и (9.4) можно пренебречь первыми слагаемыми по сравнению с последним. Тогда

$$H_{\psi} \cong \frac{I_m h \sin \theta}{4\pi r^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{v} \right), \quad (9.6)$$

$$E_r \cong \frac{2I_m h \cos \theta}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^3 \omega} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right), \quad (9.7)$$

$$E_{\theta} \cong \frac{I_m h \sin \theta}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^3 \omega} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right). \quad (9.8)$$

Так как компоненты H_{ψ} и E_r , H_{ψ} и E_{θ} взаимно перпендикулярны, вектор Пойнтинга может быть найден их перемножением.

Характер поля в ближней зоне аналогичен характеру стоячей электромагнитной волны, в которой отсутствует перенос энергии в пространстве, а имеет место лишь периодический переход энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратно.

Дальняя зона. В дальней зоне $r \gg \lambda$, и в уравнениях (9.3) и (9.4) можно пренебречь последними слагаемыми по сравнению с первым. Кроме того, сравнение радиальной и меридианной составляющих напряженности электрического поля показывает, что $E_r \ll E_{\theta}$ и компонентой E_r можно пренебречь. Тогда

$$H_{\psi} \cong \frac{I_m h \sin \theta \omega}{4\pi r v} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right), \quad (9.9)$$

$$E_r = 0, \quad (9.10)$$

$$E_{\theta} \cong \frac{I_m h \omega \sin \theta}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r v^2} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right). \quad (9.11)$$

Из уравнений (9.10) и (9.11) видно, что в дальней зоне вектор Пойнтинга направлен радиально и носит активный характер, так как H_{ψ} и E_{θ} колеблются в одной фазе.

Найдем среднее за период значение вектора Пойнтинга

$$\Pi_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T H_{\psi} E_{\theta} dt. \quad (9.12)$$

Подставляя в формулу (9.12) выражения (9.9) и (9.11), получим

$$P_{\text{ср}} \cong \frac{I_m^2 h^2 \sin^2 \theta \omega^2}{16\pi^2 \epsilon_0 r^2} \frac{1}{v^3} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) dt = \frac{I_m^2 h^2}{8r^2 \lambda^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sin^2 \theta. \quad (9.13)$$

Из формулы (9.13) видно, что величина вектора Пойнтинга убывает с расстоянием по закону $\frac{1}{r^2}$ и зависит от угла θ . В направлении вдоль диполя излучение отсутствует, а в направлении нормали достигает максимума.

При распространении электромагнитных волн в реальных условиях на пути их распространения встречаются различные естественные и искусственные препятствия, поглощающие, отражающие и рассеивающие волны. Такими препятствиями могут быть: поверхность земли, зеркала озер, морей и рек, слои ионизированной атмосферы, стальные и железобетонные сооружения и т.п. Способность радиоволн по-разному отражаться и рассеиваться от различных предметов широко используется в радиолокации; отражение и преломление волн ионизированными слоями атмосферы используется в коротковолновой радиосвязи. Особый интерес представляет отражение радиоволн металлическими предметами.

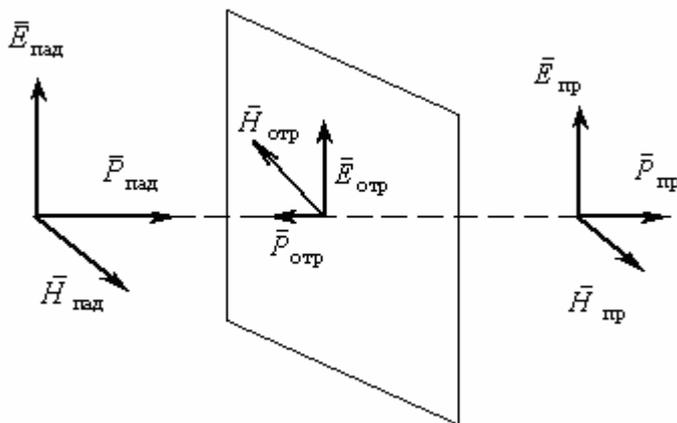


Рис. 9.2.

Электромагнитная волна на границе двух сред

Пусть на плоскую границу раздела двух сред падает плоская электромагнитная волна (рис. 9.2). При падении на поверхность раздела волна частично отражается в первую среду, образуя отраженную волну, частично переходит во вторую среду, образуя преломленную волну.

На границе раздела двух сред для электромагнитной волны выполняются следующие два граничных условия:

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad (9.14)$$

$$H_{1t} = H_{2t}. \quad (9.15)$$

Напряженность касательной составляющей слева от поверхности раздела складывается из напряженностей падающей и отраженной волн, а справа – из напряженности преломленной волны.

В соответствии с этим граничные условия (9.14) и (9.15) для плоской волны, падающей нормально к поверхности раздела, можно записать в виде:

$$E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}} = E_{\text{пр}}, \quad (9.16)$$

$$H_{\text{пад}} - H_{\text{отр}} = H_{\text{пр}}. \quad (9.17)$$

Выпишем также отношения E/H для каждой из трех волн:

$$\frac{E_{\text{пад}}}{H_{\text{пад}}} = Z_{c1}; \quad \frac{-E_{\text{отр}}}{H_{\text{отр}}} = Z_{c1}; \quad \frac{E_{\text{пр}}}{H_{\text{пр}}} = Z_{c2}. \quad (9.18)$$

Здесь Z_{c1} и Z_{c2} – волновые (характеристические) сопротивления первой и второй сред.

Решая совместно уравнения (9.16), (9.17) и (9.18), найдем:

$$E_{\text{пр}} = E_{\text{пад}} \frac{2Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}}, \quad (9.19)$$

$$E_{\text{отр}} = E_{\text{пад}} \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}, \quad (9.20)$$

$$H_{\text{пр}} = H_{\text{пад}} \frac{2Z_{c1}}{Z_{c1} + Z_{c2}}, \quad (9.21)$$

$$H_{\text{отр}} = H_{\text{пад}} \frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}}. \quad (9.22)$$

Волновое сопротивление вакуума определяется соотношением

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ Ом.}$$

Волновое сопротивление проводящей среды дается выражением

$$Z_{c2} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\gamma}}. \quad (9.23)$$

Для хороших проводников $\gamma \approx 10^7 \text{ См}$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$.

Наивысшие частоты, широко применяемые в радиотехнике, имеют величину, не превышающую $10^9 \div 10^{10} \text{ Гц}$. Подставляя эти значения в (9.23), нетрудно убедиться, что волновое сопротивление

хорошего проводника в тысячи и десятки тысяч раз меньше волнового сопротивления вакуума. Таким образом, его можно с высокой степенью точности считать равным нулю. Тогда из формул (9.19) ÷ (9.22) следует:

$$\begin{cases} E_{\text{пр}} = 0 \\ E_{\text{отр}} = -E_{\text{пад}} \\ H_{\text{пр}} = 2H_{\text{пад}} \\ H_{\text{отр}} = H_{\text{пад}} \end{cases} \quad (9.24)$$

Отсутствие в проводящей среде вектора \vec{E} говорит об отсутствии преломленной волны. Наличие $H_{\text{пр}} = 2H_{\text{пад}}$ говорит о возникновении поверхностных токов в проводящей среде. Отражение вектора \vec{E} происходит в фазе с падающей волной, отражение вектора \vec{H} – в противофазе, волна полностью отражается.

При интерференции падающей и отраженной волн возникает стоячая волна, причем у поверхности проводящего экрана в соответствии с (9.24) будет наблюдаться узел стоячей волны вектора \vec{E} . Известно, что длина стоячей волны равна половине длины бегущей волны. Поэтому на расстоянии $\lambda/4$ от поверхности экрана будет наблюдаться пучность, на расстоянии $\lambda/2$ – узел и т.д.

9.3. Описание установки

Установка представляет собой УКВ-генератор с дипольным излучателем (антенной). Генератор установлен в середине помещения на высокой стойке. Блоки питания генератора размещены под рабочим столом. Под диполем помещен лимб из прозрачного оргстекла с нанесенными делениями (через 15°).

Для измерения электрической составляющей электромагнитного поля используется приемник, состоящий из приемной дипольной антенны, микроамперметра и выпрямляющего диода (рис. 9.3). Кроме того, микроамперметр снабжен шунтами, переключая которые можно производить измерение при сигналах различной силы. Шунты на рисунке не показаны.

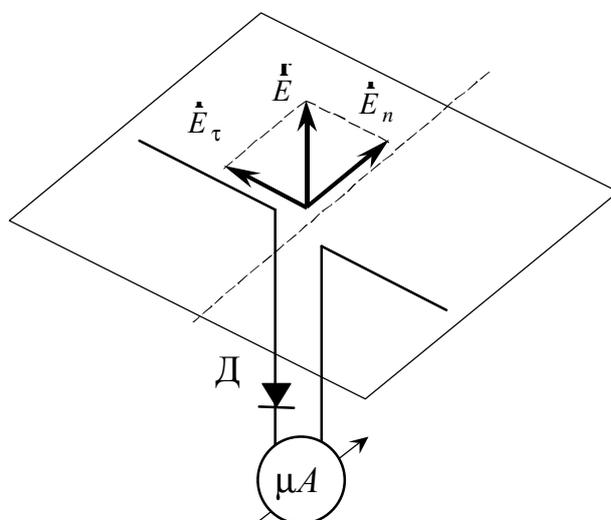


Рис. 9.3. Схема приемника

Максимальный ток в дипольной антенне будет в том случае, когда вектор напряженности электрического поля \vec{E} направлен вдоль антенны. Если вектор \vec{E} направлен перпендикулярно к оси диполя, тока в антенне не будет. При произвольном направлении вектора \vec{E} (рис. 9.3) он может быть разложен на две составляющие – вектора \vec{E}_n и \vec{E}_t . Располагая антенну приемника в двух взаимно перпендикулярных направлениях, можно измерить две взаимно перпендикулярные составляющие вектора \vec{E} . Результирующее значение вектора \vec{E} найдется как

$$E = \sqrt{E_n^2 + E_t^2}.$$

Для наблюдения интерференции волн при отражении используется металлический экран, закрепленный на стенке.

9.4. Подготовка к работе

1. Проработать раздел курса «Плоские электромагнитные волны в диэлектрике» и «Вектор Пойнтинга».
2. Составить таблицу по форме табл. 9.1.

9.5. Рабочее задание

1. Включить установку и дать прогреться генератору в течение 3...5 мин.
2. Установить рукоятку приемника излучения в одну из петель шнура, закрепленного на вертикальной оси генератора УКВ, снять зависимость E_r и E_θ от угла θ (рис. 9.4).

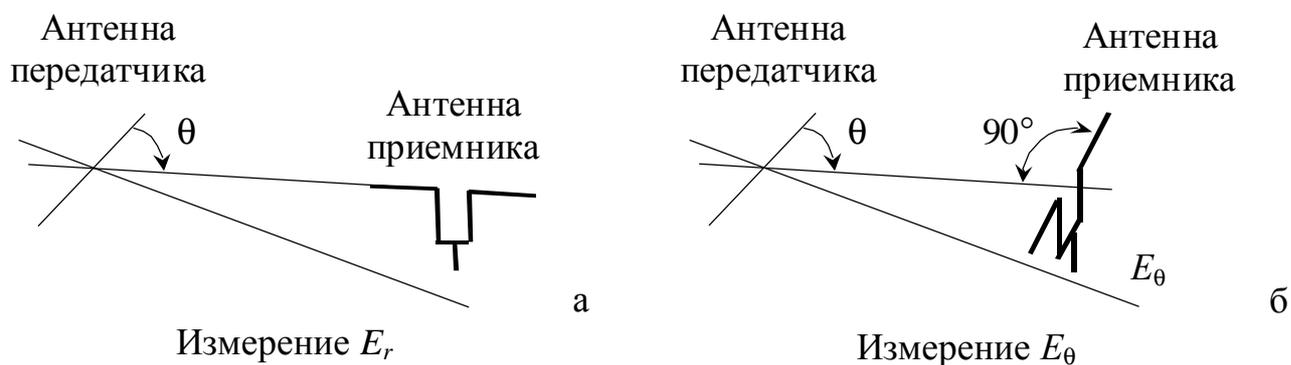


Рис. 9.4. Измерение напряженности поля

Измерения произвести для трех различных радиусов при изменении угла θ от 0° до 360° через каждые 15° . Результаты измерений занести в табл. 9.1.

Таблица 9.1

№ п/п	θ	$r_1 =$			$r_2 =$			$r_3 =$		
		E_r	E_θ	П	E_r	E_θ	П	E_r	E_θ	П
1	0°									
2	15°									
3	30°									
4	...									
...										

3. Произвести измерения E_r и E_θ при $\theta = 90^\circ$ для 4-х различных значений радиуса r . Результаты занести в табл. 9.2.

Примечание 1. В процессе каждой серии измерений согласно п.5.2 (при $r = \text{const}$) и измерениям согласно п.5.3 (при $\theta = \text{const}$) не следует производить переключение шунтов приемника. Поэтому перед началом каждой серии измерений необходимо убедиться, что в любом положении антенны стрелка индикатора находится в пределах шкалы.

Таблица 9.2

№	r	E_r	E_θ	П
1				
2				
3				
4				

4. Расположить антенну приемника горизонтально и параллельно поверхности металлического экрана на уровне антенны УКВ генератора. Постепенно удаляя антенну от экрана по направлению к нему, найти последовательно максимум, минимум и еще один максимум показаний индикатора и измерить их расстояние до экрана.

Примечание 2. В процессе измерения необходимо сохранять параллельность антенны приемника поверхности экрана и держать ее на уровне антенны-излучателя. Чувствительность следует подбирать так, чтобы прибор не «зашкаливало». Допускается переключение шунтов в процессе измерений.

5. Показать результаты измерений преподавателю и выключить установку.

9.6. Расчетно-графическое задание

1. Рассчитать значение вектора Пойнтинга Π и заполнить графы в табл. 9.1 и 9.2 в относительных величинах, учитывая, что $\Pi \sim E^2$.

2. Построить на общем графике в полярных координатах диаграммы излучения $\Pi = f(\theta)$ для трех радиусов и теоретическую кривую, построенную по формуле (9.13).

3. На отдельном графике построить зависимость $\Pi = f(r)$, используя данные табл. 9.2.

4. По данным, полученным в п.5.4 рабочего задания, найти длину волны излучения и рассчитать частоту колебаний.

9.7. Контрольные вопросы

1. Вывести уравнения плоских электромагнитных волн в диэлектрике.

2. Что такое вектор Пойнтинга?

3. Каковы граничные условия для электромагнитной волны на поверхности раздела сред?

4. Объяснить картину чередования максимумов и минимумов при отражении электромагнитной волны от проводящего экрана.

5. Объяснить расхождение экспериментальных и теоретической диаграмм направленности диполя.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТОВ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

Отчет по лабораторной работе должен быть представлен в двух экземплярах: в электронном виде и на бумажном носителе и должен содержать следующие разделы:

- титульный лист;
- название и цель работы;
- краткую теоретическую часть;
- результаты и таблицы измерений и вычислений;
- графики и изображения;
- выводы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Гардарики, 2001.– 317 с.
2. *Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л.* Теоретические основы электротехники: в 3-х тт.: Учебник для вузов. Том 3. –4-е изд. – СПб.: Питер, 2003. – 377 с.
3. Теоретические основы электротехники. Том 2 / Под ред. П.А. Ионкина. – М.: Высшая школа, 1978. – 383 с.
4. *Поливанов К.М.* Теоретические основы электротехники. Теория электромагнитного поля. Т. 3. – М.: Энергия, 1975.
5. *Нейман Л. Р., Демирчян К. С.* Руководство к лаборатории электромагнитного поля. – М.: Высшая школа, 1966. – 267 с.
6. Теория электромагнитного поля; Методические указания к лабораторным работам / Под ред. Л.Д.Основича. - Новосибирск, 1979. – 50 с.
7. *Говорков В.А., Купалян С.Д.* Теория электромагнитного поля в упражнениях в математике для и учащихся вузов.– М.: Наука, 1986. – 544 с.
8. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 736 с.

